1　2次方程式$x^2+2ax+3=0$が$0<x<3$の範囲に異なる2つの実数解をもつとき，aの値の範囲として正しいものを，(1)〜(4)の中から1つ選びなさい。

(1) $-3<a<0$　(2) $a<-\sqrt{3}$,$3<a$　(3) $-2<a$　(4) $-2<a<-\sqrt{3}$

$D/4=a^2-3>0$

$a<-\sqrt{3}, \sqrt{3}<a$ …①

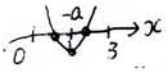
$x=0$のとき　$3>0$

$x=3$のとき　$9+6a+3>0$

$a>-2$ …②

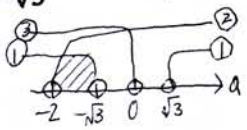
頂点

$x=-\frac{2a}{2}=-a$



$-a>0$より

$a<0$ …③



したがって

$-2<a<-\sqrt{3}$

2　nは13で割ると3余る整数とします。このとき，n^{2010}を13で割ったときの余りとして正しいものを，(1)〜(4)の中から1つ選びなさい。

(1) 0　(2) 1　(3) 2　(4) 3

$n=13k+\boxed{3}$

$n^2=(13k+3)^2=13(13k^2+6k)+\boxed{9}$

$n^3=(13k+3)^3=13(13^2k^3+9\times13k^2+27k)+27$

$=13(13^2k^3+117k^2+27k+2)+\boxed{1}$

n^4の定数項　$3^4=81$　$81\div13=6\cdots\boxed{3}$

n^5　〃　$3^5=243$　$243\div13=18\cdots\boxed{9}$

n^6　〃　$3^6=729$　$729\div13=56\cdots\boxed{1}$

したがって

$n^{2010}=(n^3)^{670}$

n^3の累乗を13で割ると、余りは1となる。

3　2点A（2，2，0），B（3，−2，1）を通る直線上の点で原点からの距離が最小となる点の座標として正しいものを，(1)〜(4)の中から1つ選びなさい。

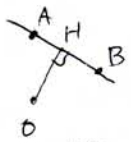
(1) $\left(\frac{7}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$　(2) $\left(\frac{8}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$　(3) $\left(\frac{13}{5}, -\frac{2}{5}, \frac{3}{5}\right)$　(4) $\left(\frac{12}{5}, \frac{2}{5}, \frac{2}{5}\right)$

2点ABを通る直線の方程式

$\frac{x-2}{3-2}=\frac{y-2}{-2-2}=\frac{z-0}{1-0}$

$x-2=\frac{y-2}{-4}=z$

$\begin{cases} x=2+z \\ y=2-4z \end{cases}$ …①



原点Oから直線ABに下した足Hの座標を(x,y,z)とすると，

$\overrightarrow{AB}=(1,-4,1)$

$\overrightarrow{OH}=(x,y,z)$

$AB\perp OH$より内積$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{OH}=0$

$x-4y+z=0$

①を代入

$(2+z)-4(2-4z)+z=0$

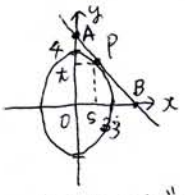
$18z-6=0$

$z=\frac{1}{3}$, $x=\frac{7}{3}$, $y=\frac{2}{3}$

したがって　$H\left(\frac{7}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$

4　楕円$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}=1$ $(x>0, y>0)$上の点$P(s, t)$における接線とx軸とy軸で囲まれた三角形の面積が最小となるsの値として正しいものを，(1)〜(4)の中から1つ選びなさい。

(1) $\frac{3}{4}$　(2) $\frac{3}{2}$　(3) $\frac{\sqrt{3}}{2}$　(4) $\frac{3\sqrt{2}}{2}$



点$P(s,t)$での接線は

$\frac{s}{9}x+\frac{t}{16}y=1$

x軸，y軸の交点A，Bの座標は

$A\left(0, \frac{16}{t}\right)$ $B\left(\frac{9}{s}, 0\right)$

△ABOの面積は

$S=\frac{1}{2}\times\frac{9}{s}\times\frac{16}{t}=\frac{72}{st}$ …①

点$P(s,t)$は楕円上にあるので

$\frac{s^2}{9}+\frac{t^2}{16}=1$

$t>0$より

$t=\frac{4}{3}\sqrt{9-s^2}$ …②

①に②を代入して

$S=\frac{54}{s\sqrt{9-s^2}}$

$s=3\cos\theta$とおくと，$0\leqq s\leqq3$より$0\leqq\theta\leqq\pi/2$

$S=\frac{54}{3\cos\theta\cdot3\sin\theta}=\frac{12}{\sin2\theta}$

$0\leqq\sin2\theta\leqq1$より

Sが最小となるのは，$\sin2\theta=1$より最小値12

$\sin2\theta=1$より

$2\theta=\frac{\pi}{2}$

$\theta=\frac{\pi}{4}$

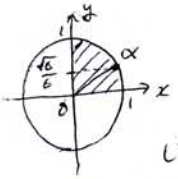
$s=3\cos\frac{\pi}{4}=3\times\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$

5　関数 $f(x)=5\sin^4 x+\cos^4 x$ の $0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}$ における最大値を M，最小値を m とします。このとき，$(M,\ m)$ の組み合わせとして正しいものを，(1)〜(4)の中から１つ選びなさい。

(1)　$\left(\dfrac{7}{2},\ 1\right)$　　(2)　$\left(5,\ \dfrac{7}{2}\right)$　　(3)　$(5,\ 1)$　　(4)　$\left(5,\ \dfrac{5}{6}\right)$

$f(x)=5\sin^4 x+\cos^4 x$
$=5\sin^4 x+(1-\sin^2 x)^2$
$=6\sin^4 x-2\sin^2 x+1$
$f'(x)=24\sin^3 x\cdot\cos x-4\sin x\cdot\cos x$
$=4\sin x\cos x(6\sin^2 x-1)$
$f'(x)=0$ より，$0\leqq x\leqq\frac{\pi}{2}$ より

$x=0,\ \frac{\pi}{2}$ と $\sin x=\frac{\sqrt{6}}{6}$ となる $x=\alpha$
$f(0)=1$，$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=5$
$f(\alpha)=6\left(\frac{\sqrt{6}}{6}\right)^4-2\left(\frac{\sqrt{6}}{6}\right)^2+1$
$=\frac{1}{6}-\frac{2}{6}+1=\frac{5}{6}$



最大値 5 ($x=\frac{\pi}{2}$ のとき)
最小値 $\frac{5}{6}$ ($x=\alpha$ のとき)

したがって，$\left(5,\ \frac{5}{6}\right)$

6　ある関数 $y=f(x)$ の接線の傾きは，常にその接点の y 座標の２倍に等しく，$y=f(x)$ のグラフ上の $x=-\dfrac{1}{2}$ における接線が点 $(1,\ 12)$ を通ります。このとき，この関数 $y=f(x)$ として正しいものを，(1)〜(4)の中から１つ選びなさい。

(1)　$y=e^{2x+1}$　　(2)　$y=2e^{2x+1}$　　(3)　$y=3e^{2x+1}$　　(4)　$y=4e^{2x+1}$

$y'=2y$ より $y=ae^{2x+b}$
$\dfrac{f(-\frac{1}{2})-12}{(-\frac{1}{2})-1}=f'(-\frac{1}{2})$
$=2f(-\frac{1}{2})$ より
$f(-\frac{1}{2})=3$

接点 $(-\frac{1}{2},\ 3)$ を代入
$3=ae^{2(-\frac{1}{2})+b}$
$=ae^{b-1}$
$b-1=0$ ∴ $b=1$
$a=3$

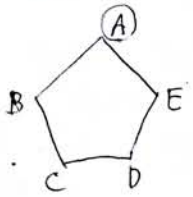
したがって，
$y=3e^{2x+1}$

7　正五角形 $ABCDE$ の各頂点上を，動点 P が点 A を出発点として以下のきまりで動きます。

きまり：１から６までの目の出るさいころを１つ投げて，奇数の目が出たら時計回りに１つ隣の頂点へ移動し，偶数の目が出たら反時計回りに２つ隣の頂点へ移動する。

いま，さいころを 10 回投げるとき，動点 P が点 A 上にある確率として正しいものを，(1)〜(4)の中から１つ選びなさい。

(1)　$\dfrac{63}{256}$　　(2)　$\dfrac{65}{256}$　　(3)　$\dfrac{127}{512}$　　(4)　$\dfrac{129}{512}$



奇数1,3,5の目のとき，右に1つ
偶数2,4,6の目のとき，左に2つ
10回投げて Aにもどるのは，
奇 10回
偶 10回
奇5個偶5個

$\left(\frac{1}{2}\right)^{10}+{}_{10}C_5\left(\frac{1}{2}\right)^5\left(\frac{1}{2}\right)^5+\left(\frac{1}{2}\right)^{10}$
$=\frac{1}{1024}+\frac{252}{1024}+\frac{1}{1024}$
$=\frac{254}{1024}=\frac{127}{512}$

8　自然数 n が $(n+1)$ 個ずつ続く数列 $\{1,\ 1,\ 2,\ 2,\ 2,\ 3,\ 3,\ 3,\ 3,\ 4,\ 4,\ 4,\ 4,\ 4,\ 5,\ \cdots\}$ において，第 2011 項の値として正しいものを，(1)〜(4)の中から１つ選びなさい。

(1)　60　　(2)　62　　(3)　64　　(4)　66

自然数 1 2 3 4 ‥‥ n
個数 2 3 4 5 ‥‥ $(n+1)$
自然数 n の最後の項は，
$2+3+4+\cdots+(n+1)$
$=\dfrac{n(n+3)}{2}$

$\dfrac{n(n+3)}{2}=2011+\alpha$
$n^2+3n-(4022+2\alpha)=0$
$n=\dfrac{-3\pm\sqrt{9+16088+8\alpha}}{2}$
$=\dfrac{-3\pm\sqrt{16097+8\alpha}}{2}$

$$\begin{array}{r|l} & 1\ 2\ 6.8 \\ 1 & 160\ 97 \\ 1 & 1 \\ \hline 22 & 60 \\ 2 & 44 \\ \hline 246 & 1697 \\ 6 & 1476 \\ \hline 2528 & 22100 \\ 8 & 20224 \\ \hline 2536 & 187600 \end{array}$$

$n=\dfrac{-3\pm127}{2}$
$n>0$ より
$n=\dfrac{124}{2}$
$=62$

9　3次方程式$x^3-x-4=0$の3つの解をα,β,γとするとき，$(\alpha^2+2\alpha+4)(\beta^2+2\beta+4)(\gamma^2+2\gamma+4)$の値として正しいものを，(1)〜(4)の中から1つ選びなさい。

(1) 20　　(2) 24　　(3) 28　　(4) 32

$x^3-x-4=0$の解α,β,γより

$$\begin{cases}\alpha+\beta+\gamma=0\\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=-1\\ \alpha\beta\gamma=4\end{cases}$$

また，$\alpha^3=\alpha+4,\ \beta^3=\beta+4,\ \gamma^3=\gamma+4$

与式$=(\alpha^2+2\alpha+4)(\beta^2+2\beta+4)(\gamma^2+2\gamma+4)$

$$=\frac{(\alpha^3-8)(\beta^3-8)(\gamma^3-8)}{(\alpha-2)(\beta-2)(\gamma-2)}=\frac{(\alpha-4)(\beta-4)(\gamma-4)}{(\alpha-2)(\beta-2)(\gamma-2)}$$

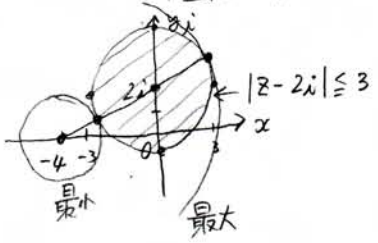
$$=\frac{\alpha\beta\gamma-4(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)+16(\alpha+\beta+\gamma)-64}{\alpha\beta\gamma-2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)+4(\alpha+\beta+\gamma)-8}$$

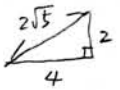
$$=\frac{4-4\times(-1)+16\times0-64}{4-2\times(-1)+4\times0-8}=\frac{-56}{-2}=28$$

10　複素数平面上で$|z-2i|\leqq3$をみたすzに対して，$|z+4|$の最大値として正しいものを，(1)〜(4)の中から1つ選びなさい。

(1) $2+4\sqrt{5}$　　(2) $3+2\sqrt{5}$　　(3) $4+2\sqrt{5}$　　(4) $6+4\sqrt{5}$

ガウス平面上に作図すると，





最大円

$|z+4|=3+2\sqrt{5}$

11　x^9+ax^2をx^2+x+1で割ったときの余りが$x+2$であるとき，aの値として正しいものを，(1)〜(4)の中から1つ選びなさい。

(1) -2　　(2) -1　　(3) 1　　(4) 2

たて書きの割算をして，

$(x^9+ax^2)\div(x^2+x+1)=x^7-x^6+x^4-x^3+x+(a-1)$ ---- 余り $-ax+(1-a)$

$-ax+(1-a)=x+2$ より

$a=-1$

12　A市のゴミの1年間の焼却量の合計は，前年と比べて8％増加しています。毎年この比率で増加するとした場合，ゴミの焼却量が8倍を超えるのは何年後になりますか。正しいものを，(1)〜(4)の中から1つ選びなさい。ただし，$\log_{10}2=0.3010$，$\log_{10}3=0.4771$とします。

(1) 28年後　　(2) 29年後　　(3) 30年後　　(4) 31年後

$(1+0.08)^n>8$

両辺に対数をつけて

$n\log_{10}1.08>3\log_{10}2$

$$n>\frac{3\log_{10}2}{\log_{10}\frac{108}{100}}=\frac{3\times\log_{10}2}{\log_{10}2^2\times3^3-\log_{10}10^2}=\frac{3\times0.3010}{2\times0.3010+3\times0.4771-2}$$

$$=\frac{0.9030}{0.6020+1.4313-2}=\frac{9030}{333}\fallingdotseq27.1$$

したがって，28年後