1　「数学Ⅰ」の授業で，次の題材を理解させることをねらいとして取り扱う場合の授業展開例を示しなさい。また，その際の指導上の留意点及び評価も書きなさい。

| |
|---|
| 鈍角の三角比 $\sin 120^\circ = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ である。 |

鋭角の三角比の定義は直角三角形の辺より定められているが，鈍角となると，座標が入ってきて，単位円の上の点のx座標，y座標により新たに定義されるので，新旧定義の移行がスムーズにできるようにする。

2　$xy$ 平面上に，放物線 $C : y = x^2 + x - \dfrac{9}{4}$ と直線 $l : y = x$ があり，2点 $A(a, a)$，$B(b, b)$ で交わっています。ただし，$a < b$ とします。点 $P$ が放物線 $C$ 上を動くとき，次の問いに答えなさい。

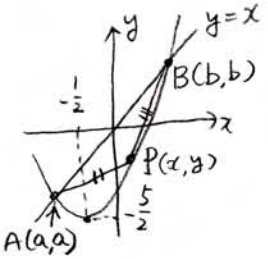
(1)　2点 $A$，$B$ の座標を求めなさい。

(2)　$PA = PB$ となる二等辺三角形 $PAB$ における，点 $P$ の $x$ 座標を求めなさい。

(3)　$\angle P = 90^\circ$ となる直角三角形 $PAB$ における，点 $P$ の $x$ 座標を求めなさい。

$y = x^2 + x - \frac{9}{4}$

$= \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{5}{2}$




(1) $x^2 + x - \frac{9}{4} = x$

$\left(x - \frac{3}{2}\right)\left(x + \frac{3}{2}\right) = 0$

$x = \frac{3}{2}, -\frac{3}{2}$

$a < b$ より

$A\left(-\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\right)$, $B\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$

(2) $P(x, y)$ とすると，

$PA = PB$ より $PA^2 = PB^2$

$\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{3}{2}\right)^2 = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2$

$\frac{6}{2} \times 2x = -\frac{6}{2} \times 2y$

$y = -x$（直線ABの垂直二等分線）

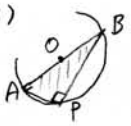
$x^2 + x - \frac{9}{4} = -x$ より

$4x^2 + 8x - 9 = 0$

$x = \frac{-4 \pm \sqrt{16 + 36}}{4}$

$= \frac{-2 \pm \sqrt{13}}{2}$

(3)




$OB = \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2}$

$= \frac{3\sqrt{2}}{2}$

$x^2 + y^2 = \frac{18}{4}$

$x^2 + \left(x^2 + x - \frac{9}{4}\right)^2 = \frac{18}{4}$

$x^4 + 2x^3 - \frac{10}{4}x^2 - \frac{18}{4}x + \frac{9}{16} = 0$

$\left(x - \frac{3}{2}\right)\left(x + \frac{3}{2}\right)\left(x^2 + 2x - \frac{1}{4}\right) = 0$

$4x^2 + 8x - 1 = 0$

$x = \frac{-4 \pm \sqrt{16 + 4}}{4}$

$= \frac{-2 \pm \sqrt{5}}{2}$

3　1から12までの番号のついた赤球が12個，同様に1から12までの番号のついた白球が12個，合計24個の球が入った袋があります。この袋の中から，順番に5個の球を取り出すとき，次の確率を求めなさい。ただし，球は袋の中から等確率で取り出されるものとし，一度取り出した球は袋に戻さないこととします。

(1)　5個目の球を取り出したときに初めて同じ番号の赤球と白球が出る確率。

(2)　取り出した5個の球のうち，同じ番号の赤球と白球が1組だけ含まれる確率。

(3)　3個目に取り出した球の番号よりも5個目に取り出した球の番号の方が大きくなる確率。

赤球 12
白球 12

①②③④⑤

(1) $\dfrac{24 \times 22 \times 20 \times 18 \times 4}{{}_{24}P_5}$

$= \dfrac{24}{161}$

(2) $\dfrac{({}_5P_2 \times 12) \times 22 \times 20 \times 18}{{}_{24}P_5}$

$= \dfrac{60}{161}$

(3) 3個目と5個目が同じ番号のとき

$\dfrac{({}_2P_2 \times 12) \times 22 \times 21 \times 20}{{}_{24}P_5}$

$= \dfrac{1}{23}$

異なるのは，$1 - \dfrac{1}{23} = \dfrac{22}{23}$

3個目の番号 > 5個目の番号 と
3個目の番号 < 5個目の番号 は半々より

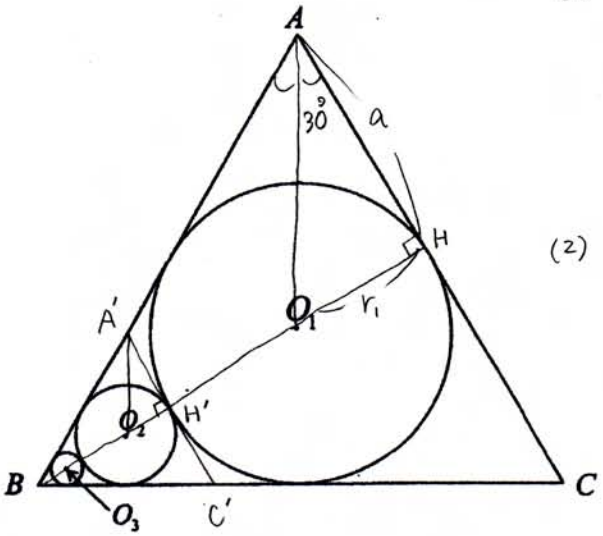
$\dfrac{22}{23} \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{11}{23}$

4　下の図のように一辺の長さが $2a$ の正三角形 $ABC$ に円 $O_1$ を内接させます。次に辺 $AB$，辺 $BC$ 及び円 $O_1$ に接する円 $O_2$ を図のようにかき，同様に辺 $AB$，辺 $BC$ 及び円 $O_2$ に接する円 $O_3$ を図のようにかきます。このように順次，円 $O_4$，$O_5$，$O_6$，… をかくとき，次の問いに答えなさい。

(1)　円 $O_1$，$O_2$ の半径 $r_1$，$r_2$ を求めなさい。

(2)　$n$ 個の円 $O_1$，$O_2$，$O_3$，…，$O_n$ の面積の総和 $S_n$ を求めなさい。

(3)　$\lim_{n\to\infty} S_n$ を求めなさい。




(1) $a : r_1 = \sqrt{3} : 1$ より，$r_1 = \frac{a}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}a$

$BH = \sqrt{3}a = 3r_1$ より

$A'H' = \frac{1}{3}a$

$\frac{1}{3}a : r_2 = \sqrt{3} : 1$ より　$r_2 = \frac{\frac{1}{3}a}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{9}a$

(2) $S_n = \pi r_1^2 + \pi r_2^2 + \cdots + \pi r_n^2$

$= \pi\left\{\left(\frac{\sqrt{3}}{3}a\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{9}a\right)^2 + \cdots + \left(\frac{\sqrt{3}}{3^n}a\right)^2\right\}$

$= 3a^2\pi\left\{\left(\frac{1}{9}\right) + \left(\frac{1}{9}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{1}{9}\right)^n\right\}$

$= 3a^2\pi \times \dfrac{\frac{1}{9}\left\{1-\left(\frac{1}{9}\right)^n\right\}}{1-\frac{1}{9}}$

$= \frac{3}{8}a^2\pi\left\{1-\left(\frac{1}{9}\right)^n\right\}$

(3) $\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{3}{8}a^2\pi\left\{1-\left(\frac{1}{9}\right)^n\right\}$

$= \frac{3}{8}a^2\pi(1-0)$

$= \frac{3}{8}a^2\pi$

5　点 $A\,(1,0,0)$ と点 $B(1,1,1)$ を結ぶ直線について，次の問いに答えなさい。

(1)　直線 $AB$ の方程式を求めなさい。

(2)　直線 $AB$ を $z$ 軸のまわりに回転してできる曲面の方程式を求めなさい。

(3)　線分 $AB$ を $z$ 軸のまわりに回転してできる立体の体積を求めなさい。

(1) $P(x, y, z)$ とすると，

$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{AB}$ より

$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1-1 \\ 1-0 \\ 1-0 \end{pmatrix}$

$\begin{cases} x = 1 \\ y = t \\ z = t \end{cases}$

したがって，

$\begin{cases} x = 1 \\ y = z \end{cases}$

(2) $z = k$ とおくと

$AB$ 上の点 $P(1, k, k)$

点 $Q$ は $z$ 軸上の点とすると，

$Q(0, 0, k)$

$PQ^2 = (1-0)^2 + (k-0)^2 + (k-k)^2$

$= 1 + k^2$

$PQ$ を半径として，$z$ 軸のまわりを回転させると，

$x^2 + y^2 = 1 + k^2$

$z = k$ より，

$x^2 + y^2 = 1 + z^2$

したがって，

$x^2 + y^2 - z^2 = 1$

(3) $z = k$ で切りとると

$x^2 + y^2 = 1 + k^2$

円の面積

$S(k) = \pi(1 + k^2)$

$V = \int_0^1 S(k)\,dk$

$= \left[\pi\left(k + \frac{k^3}{3}\right)\right]_0^1$

$= \frac{4}{3}\pi$