1　2次関数 $y=2ax^2+ax+a-1$ のグラフが，常に2次関数 $y=ax^2+x$ のグラフの下方にあるような，定数 a の値の範囲として正しいものを，(1)〜(4)の中から1つ選びなさい。

(1) $a<-\frac{1}{3}$　　(2) $-\frac{1}{3}<a<0$　　(3) $-\frac{1}{3}<a<1$　　(4) $0<a<1$

すべての x の値に対して

$ax^2+x>2ax^2+ax+a-1$

$ax^2+(a-1)x+(a-1)<0$

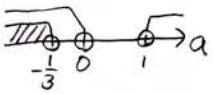
平方完成して　$a\left(x+\frac{a-1}{2a}\right)^2+\frac{3a^2-2a-1}{4a}<0$

$a<0$，$a\neq0$ より

$3a^2-2a-1>0$

$(3a+1)(a-1)>0$

$a<-\frac{1}{3}$，$1<a$



したがって

$a<-\frac{1}{3}$

2　実数 x，y が，条件 $x\geqq0$，$y\geqq0$，$x+y=2$ を満たすとき，$\frac{x}{1+2y}+\frac{y}{1+2x}$ の最小値として正しいものを，(1)〜(4)の中から1つ選びなさい。

(1) $\frac{7}{8}$　　(2) $\frac{3}{2}$　　(3) 2　　(4) $\frac{2}{3}$

与式 $P=\frac{x}{1+2y}+\frac{y}{1+2x}$

$y=2-x$ を代入

$P=\frac{x}{5-2x}+\frac{2-x}{1+2x}$

$=\frac{4x^2-8x+10}{-4x^2+8x+5}$

$=-1+\frac{15}{-4x^2+8x+5}$

P が最小値になるためには

$Q=-4x^2+8x+5$ が最大値のときより

$Q=-4(x-1)^2+9$

$x=1$ のとき最大値9

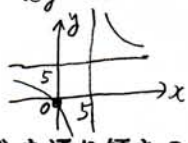
したがって

$P=-1+\frac{15}{9}=\frac{6}{9}=\frac{2}{3}$

3　方程式 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{5}$ を満たす正の整数の組 $(x,\ y)$ の個数として正しいものを，(1)〜(4)の中から1つ選びなさい。

(1) 1個　　(2) 2個　　(3) 3個　　(4) 5個

$\frac{x+y}{xy}=\frac{1}{5}$ より



$y=\frac{-5x}{5-x}=\frac{25}{x-5}+5$

y が正の整数になるのは

$x=6$ のとき $y=30$

$x=10$ のとき $y=10$

$x=30$ のとき $y=6$

したがって

$(6,30)(10,10)(30,6)$

の3個

4　点A(2, 3)を通り傾き2の直線を l とし，点Aを通り l に直交する直線を m とします。また放物線 $y=x^2$ を x 軸方向に a（$a\neq0$）だけ平行移動した曲線を C とします。このとき，曲線 C が直線 l, m から切り取る2つの線分の長さが等しくなるような a の値として正しいものを，(1)〜(4)の中から1つ選びなさい。

(1) $\frac{17}{120}$　　(2) $\frac{7}{8}$　　(3) $-\frac{1}{4}$　　(4) $\frac{65}{136}$

直線 l の方程式は

$y-3=2(x-2)$

$y=2x-1$ ……①

直交する直線 m の方程式は

$y-3=-\frac{1}{2}(x-2)$

$y=-\frac{1}{2}x+4$ ……②

放物線 C の方程式は

$y=(x-a)^2$ ……③

①③の交点をB, Cとすると，

$(x-a)^2=2x-1$

$x^2-2(a+1)x+a^2+1=0$

$x=a+1\pm\sqrt{(a+1)^2-(a^2+1)}$

$=a+1\pm\sqrt{2a}$

$y=2a+1\pm2\sqrt{2a}$

$BC=\sqrt{8a+32a}$

$=\sqrt{40a}$

同様にして

②③の交点D, Eは

$DE=\frac{\sqrt{5(65-8a)}}{4}$

$BC^2=DE^2$ より

$40a=\frac{5(65-8a)}{16}$

$128a=65-8a$

$136a=65$

$a=\frac{65}{136}$

5　xを実数，$k \geqq -4$とするとき，$y = 9^x + 9^{-x} + k\left(3^x + 3^{-x}\right)$の最小値として正しいものを，(1)〜(4)の中から１つ選びなさい。

(1) $2k+2$　　(2) $2k-2$　　(3) $-\frac{1}{4}k^2+2$　　(4) $-\frac{1}{4}k^2-2$

$y=(3^x+3^{-x})^2+k(3^x+3^{-x})-2$

$3^x+3^{-x}=T$ とおくと $T \geqq 2$

$y=T^2+kT-2$

$=\left(T+\frac{k}{2}\right)^2-\frac{8+k^2}{4}$

頂点 $T_1=-\frac{k}{2}$ は，

$k \geqq -4$ より $T_1 \leqq 2$

したがって $T_1=2$ のとき最小値をもつから

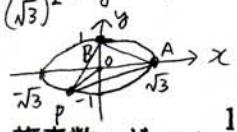
最小値は $y=2+2k$

6　曲線 $x^2+3y^2=3$ 上に点Pがあります。また，２定点をA$(\sqrt{3}, 0)$，B$(0, 1)$とするとき，△APBの面積の最大値として正しいものを，(1)〜(4)の中から１つ選びなさい。

(1) $\frac{\sqrt{3}}{4}\left(\sqrt{2}+2\right)$　　(2) $\sqrt{3}$　　(3) $\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\sqrt{2}+1\right)$　　(4) $\frac{\sqrt{3}}{4}\left(\sqrt{6}+2\right)$

$x^2+3y^2=3$ …①

$\frac{x^2}{(\sqrt{3})^2}+y^2=1$



$P(x, y)$とすると，

$S=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}y+\frac{1}{2}x$

$S'=\frac{\sqrt{3}}{2}y'+\frac{1}{2}$ …②

①より $y'=-\frac{x}{3y}$ …③

②に③を代入

$S'=-\frac{\sqrt{3}x}{6y}+\frac{1}{2}$

$S'=0$ より

$y=\frac{1}{\sqrt{3}}x$ …④

①に④を代入

$y=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$

$x=\pm\frac{\sqrt{6}}{2}$

点 $P\left(-\frac{\sqrt{6}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ のとき最大

したがって

$S=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}|y|+\frac{1}{2}|x|$

$=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{6}}{4}+\frac{\sqrt{6}}{4}$

$=\frac{\sqrt{3}}{2}(\sqrt{2}+1)$

7　複素数zが $z+\frac{1}{z}=1$ を満たすとき，$z^{23}+\frac{1}{z^{18}}$の値として正しいものを，(1)〜(4)の中から１つ選びなさい。

(1) $\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i$　　(2) $3\pm i$　　(3) $\frac{\sqrt{3}}{2}\pm\frac{1}{2}i$　　(4) $\frac{3}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i$

$z+\frac{1}{z}=1$ より

$z^2-z+1=0$

$z=\frac{1\pm\sqrt{1-4}}{2}$

$=\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i$

$z=\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i$ とすると，

$z=\cos\frac{\pi}{3}\pm i\sin\frac{\pi}{3}$

$z^{23}=\cos\frac{23}{3}\pi\pm i\sin\frac{23}{3}\pi$

$=\cos\left(8-\frac{1}{3}\right)\pi\pm i\sin\left(8-\frac{1}{3}\right)\pi$

$=\cos\frac{\pi}{3}\mp i\sin\frac{\pi}{3}$

$=\frac{1}{2}\mp\frac{\sqrt{3}}{2}i$

$z^{18}=\cos\frac{18}{3}\pi\pm i\sin\frac{18}{3}\pi$

$=\cos 6\pi\pm i\sin 6\pi$

$=1$

したがって

$z^{23}+\frac{1}{z^{18}}=\frac{1}{2}\mp\frac{\sqrt{3}}{2}i+\frac{1}{1}$

$=\frac{3}{2}\mp\frac{\sqrt{3}}{2}i$

8　無限級数 $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{7}-\frac{1}{9}+\cdots$ の和として正しいものを，(1)〜(4)の中から１つ選びなさい。

(1) 0　　(2) 1　　(3) 2　　(4) 3

$I=\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\cdots$

$S=1-I+I=1$

9 101^{2012}の下位5桁の値として正しいものを，(1)〜(4)の中から1つ選びなさい。

(1) 61201　　(2) 68401　　(3) 73801　　(4) 75701

$101^{2012} = (100+1)^{2012}$

二項係数を使って，

${}_{2012}C_2(100)^2 + {}_{2012}C_1(100) + {}_{2012}C_0 1$

$= 20230660000 + 201200 + 1$

$= 20230861201$　　下位5桁の値は 61201

10 実数x，y，zが$x^2+y^2+z^2=x+y+z$を満たすとき，$x-y-z$のとりうる値の範囲として正しいものを，(1)〜(4)の中から1つ選びなさい。

(1) $-1 \leqq x-y-z \leqq 2$　(2) $-2 \leqq x-y-z \leqq 1$　(3) $1 \leqq x-y-z \leqq 2$　(4) $-2 \leqq x-y-z \leqq -1$

$x^2+y^2+z^2=x+y+z$ より

$(x-\frac{1}{2})^2+(y-\frac{1}{2})^2+(z-\frac{1}{2})^2=\frac{3}{4}$

与式 $P = x-y-z = (x,y,z)\cdot(1,-1,-1)$ 内積

内積が最大になるのは $(x,y,z) /\!/ (1,-1,-1)$

球の中心を通り$(1,-1,-1)$に平行な空間の直線の方程式は

$\frac{x-\frac{1}{2}}{1} = \frac{y-\frac{1}{2}}{-1} = \frac{z-\frac{1}{2}}{-1} = k$ より

$x=\frac{1}{2}+k,\ y=\frac{1}{2}-k,\ z=\frac{1}{2}-k$

球の方程式に代入して

$k^2+k^2+k^2=\frac{3}{4}$　$k=\pm\frac{1}{2}$

(1) $k=\frac{1}{2}$のとき

$x=1, y=0, z=0$

$P=1$

(2) $k=-\frac{1}{2}$のとき

$x=0, 1, z=1$

$P=-2$

したがって $-2 \leqq P \leqq 1$

11 $a_1=\sqrt{3}$，$a_2=\sqrt{3\sqrt{3}}$，$a_3=\sqrt{3\sqrt{3\sqrt{3}}}$，…のとき，$\lim_{n\to\infty} a_n$の値として正しいものを，(1)〜(4)の中から1つ選びなさい。

(1) $\sqrt{3}$　　(2) $\sqrt{6}$　　(3) 3　　(4) $2\sqrt{3}$

$a_1=\sqrt{3}=3^{\frac{1}{2}}$

$a_2=\sqrt{3\sqrt{3}}=3^{\frac{3}{4}}$

$a_3=\sqrt{3\sqrt{3\sqrt{3}}}=3^{\frac{7}{8}}$

⋮

$a_n=3^{1-\frac{1}{2^n}}$

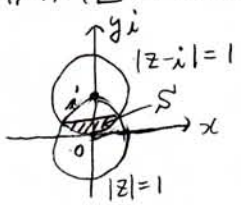
したがって，

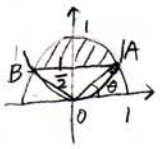
$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} 3^{1-(\frac{1}{2})^n} = 3^{1-0} = 3$

12 複素数zが不等式 $|z| \leqq |z-i| \leqq 1$ を満たします。この複素数zが複素平面上で描く図形の面積として正しいものを，(1)〜(4)の中から1つ選びなさい。

(1) $\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}$　　(2) $\frac{\pi}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}$　　(3) $\frac{\pi}{2}-\frac{\sqrt{3}}{4}$　　(4) $\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{4}$

ガウス平面上に作図して





$x^2+y^2=1$

$x^2+(y-1)^2=1$

より

$y=\frac{1}{2},\ x=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\sin\theta=\frac{1}{2}$ より

$\theta=\frac{\pi}{6}$

扇形の面積

$\pi\times1^2\times\frac{(\frac{2}{3})\pi}{2\pi}=\frac{1}{3}\pi$

△OABの面積

$\sqrt{3}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}}{4}$

したがって

$S'=\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{4}$