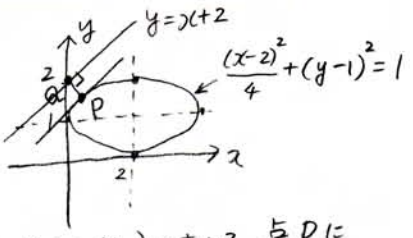
1　「数学Ⅰ」の授業で，次の題材を理解させることをねらいとして取り扱う場合の授業展開例を示しなさい。また，その際の指導上の留意点及び評価も書きなさい。

連立１次不等式 $\begin{cases} 2x+1<6x+5 \\ 7x-2 \leqq 4x+7 \end{cases}$ を解いてみよう。

それぞれの1次不等式の解の範囲を出して、数直線上に記入し、その共通部分が連立の解であることを示す。その際，両端の点が含まれるかどうかチェックする。

2　曲線 $\dfrac{(x-2)^2}{4}+(y-1)^2=1$ 上に点Ｐ，直線 $y=x+2$ 上に点Ｑがあります。このとき，線分ＰＱの最小値を求めなさい。



$P(x_1, y_1)$ とおいて、点Pにおける接線の方程式

$$\frac{(x_1-2)(x-2)}{4}+(y_1-1)(y-1)=1$$

$$y=\frac{(2-x_1)}{4(y_1-1)}(x-2)+\frac{1}{y_1-1}+1$$

$y=x+2$ と平行となる接線は

$$\frac{(2-x_1)}{4(y_1-1)}=1$$

$$y_1=-\frac{1}{4}x_1+\frac{3}{2}$$

楕円の式に代入して

$$\frac{(x_1-2)^2}{4}+\left(-\frac{1}{4}x_1+\frac{1}{2}\right)^2=1$$

$$4(x_1-2)^2+(x_1-2)^2=16$$

$$(x_1-2)^2=\frac{16}{5}$$

$$x_1=\frac{\pm 4}{\sqrt{5}}+2$$

$$y_1=\mp\frac{1}{\sqrt{5}}+1$$

PQの最短距離を求める公式より

$$PQ=\frac{\left|\pm\frac{4}{\sqrt{5}}+2\pm\frac{1}{\sqrt{5}}-1+2\right|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\left|\pm\frac{5}{\sqrt{5}}+3\right|$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\left|\pm\sqrt{5}+3\right|$$

最短より

$$PQ=\frac{1}{\sqrt{2}}(3-\sqrt{5})$$

$$=\frac{3\sqrt{2}-\sqrt{10}}{2}$$

3　n を整数とするとき，$2n^3+3n^2-5n$ が６の倍数となることを証明しなさい。

与式 $P=2n^3+3n^2-5n$

$=n(n-1)(2n+5)$

連続する3つの整数には、必ず2の倍数と3の倍数が入っているので

$(2k-1)2k(2k+1)=6m$ より

① $n=2k$（kは整数）のとき

$P=2k(2k-1)(4k+5)$

$=2k(2k-1)\{2(2k+1)+3\}$

$=2(2k-1)2k(2k+1)+6k(2k-1)$

$=6\{2m+k(2k-1)\}$

② $n=2k+1$ のとき

$P=(2k+1)(2k)(4k+7)$

$=2k(2k+1)\{2(2k-1)+9\}$

$=2(2k-1)2k(2k+1)+18k(2k+1)=6\{2m+3k(2k+1)\}$

したがって

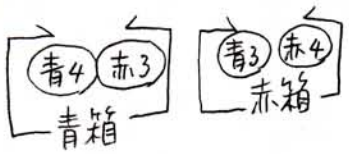
①②より

すべての整数 n に対して

$2n^3+3n^2-5n$ は

6の倍数となる

4　青球４個，赤球３個が入っている青箱と，青球３個，赤球４個が入っている赤箱があります。１回目は青箱から球を１個取り出してもとに戻し，２回目は１回目に取り出された球と同じ色の箱から球を１個取り出してもとに戻します。それ以降も，同様にして，k 回目は $k-1$ 回目に取り出された球と同じ色の箱から１個の球を取り出してもとに戻すこととします。このとき，n 回目に取り出される球が青球である確率を求めなさい。ただし，どの球も箱から取り出される事象は同様に確からしいとします。



1回目　$P_1(青)=\frac{4}{7}$

2回目　$P_2(青)=P_1(青)\times\frac{4}{7}+P_1(赤)\times\frac{3}{7}$

$=\frac{4}{7}\times\frac{4}{7}+\frac{3}{7}\times\frac{3}{7}=\frac{25}{49}$

3回目　$P_3(青)=P_2(青)\times\frac{4}{7}+P_2(赤)\times\frac{3}{7}$

$=\frac{25}{49}\times\frac{4}{7}+\frac{24}{49}\times\frac{3}{7}=\frac{172}{343}$

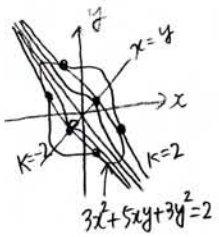
n 回目　$P_n(青)=\dfrac{\frac{7^{n-1}+1}{2}}{7^{n-1}}\times\frac{4}{7}+\dfrac{\frac{7^{n-1}-1}{2}}{7^{n-1}}\times\frac{3}{7}$

$=\frac{1}{7^n}\left(2\times7^{n-1}+2+\frac{3}{2}\times7^{n-1}-\frac{3}{2}\right)$

$=\frac{1}{7^n}\left(\frac{7}{2}\times7^{n-1}+\frac{1}{2}\right)$

$=\frac{1}{2}\left\{1+\left(\frac{1}{7}\right)^n\right\}$

5　実数 x，y が，$3x^2+5xy+3y^2=2$ を満たすとき，x^3+y^3 の最大値と最小値を求めなさい。



接線の傾きが一致する場所が最大・最小となるので，

$6x+5y+5x\frac{dy}{dx}+6y\frac{dy}{dx}=0$

$\frac{dy}{dx}=\frac{-6x-5y}{5x+6y}$ …①

$x^3+y^3=k$ とおいて

$3x^2+3y^2\frac{dy}{dx}=0$

$\frac{dy}{dx}=-\frac{x^2}{y^2}$ …②

①②より

$\frac{-6x-5y}{5x+6y}=-\frac{x^2}{y^2}$

$6xy^2+5y^3=5x^3+6x^2y$

$5x^3+6x^2y-6xy^2-5y^3=0$

$(x-y)(5x^2+11xy+5y^2)=0$

(i) $x-y=0$ のとき、$3x^2+5xy+3y^2=2$ より

$x=\pm\sqrt{\frac{2}{11}}$，$y=\pm\sqrt{\frac{2}{11}}$

$k=\left(\pm\sqrt{\frac{2}{11}}\right)^3+\left(\pm\sqrt{\frac{2}{11}}\right)^3=\pm\frac{4}{11}\sqrt{\frac{2}{11}}$

(ii) $5x^2+11xy+5y^2=0$ のとき

$3x^2+5xy+3y^2=2$ と連立して

$8xy=-10$

$xy=-\frac{5}{4}$　$5(x+y)^2=\frac{5}{4}$　$x+y=\pm\frac{1}{2}$　$5(x^2+y^2)=-11\times\left(-\frac{5}{4}\right)$

$x^2+y^2=\frac{11}{4}$

下の3つの値より，

$k=x^3+y^3$

$=(x+y)(x^2-xy+y^2)$

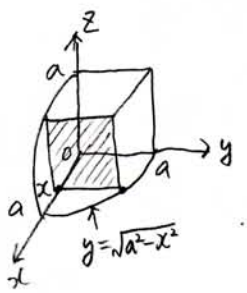
$=\pm\frac{1}{2}\left(\frac{11}{4}+\frac{5}{4}\right)$

$=\pm2$

したがって

最大値2，最小値−2

6　半径 a の２つの直円柱の軸が直交しているときの共通部分の体積を求めなさい。



$x^2+y^2=a^2$

$y=\sqrt{a^2-x^2}$

$V=8\times\int_0^a\left(\sqrt{a^2-x^2}\right)^2dx$

$=8\left[a^2x-\frac{1}{3}x^3\right]_0^a$

$=\frac{16}{3}a^3$