1　関数 $y=(3x^2-4x+1)(-3x^2+4x-2)$ の最大値として正しいものを，(1)〜(4)の中から１つ選びなさい。

(1) $\frac{1}{4}$　　(2) $\frac{2}{9}$　　(3) $-\frac{3}{2}$　　(4) $\frac{4}{3}$

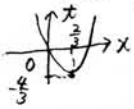
$3x^2-4x=t$ とおく

$y=(t+1)(-t-2)$

$=-(t+\frac{3}{2})^2+\frac{1}{4}$

$t=3x^2-4x$

$=3(x-\frac{2}{3})^2-\frac{4}{3}$



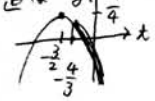
グラフより

$t\geqq-\frac{4}{3}$

$t\geqq-\frac{4}{3}$ のとき

$y=-(t+\frac{3}{2})^2+\frac{1}{4}$

の最大値は



グラフより

$t=-\frac{4}{3}$ のとき

最大値

$y=-(-\frac{4}{3}+\frac{3}{2})^2+\frac{1}{4}$

$=\frac{2}{9}$

2　$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+\sin ax}-1}{\sin 3x}=1$ のとき，a の値として正しいものを，(1)〜(4)の中から１つ選びなさい。

(1) 1　　(2) 2　　(3) 3　　(4) 6

左辺 $=\lim_{x\to0}\frac{(1+\sin ax)-1}{\sin 3x(\sqrt{1+\sin ax}+1)}$

$=\lim_{x\to0}\frac{\sin ax}{\sin 3x}\times\frac{1}{\sqrt{1+0}+1}$

$=\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\frac{\sin ax/ax}{\sin 3x/3x}\times\frac{ax}{3x}$

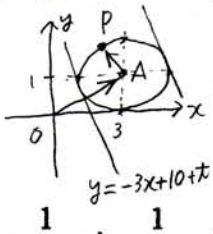
$=\frac{1}{2}\times\frac{1}{1}\times\frac{a}{3}$

$=\frac{a}{6}$

右辺 $=1$ より　$a=6$

3　２定点 O(0, 0)，A(3, 1) と，曲線 $\frac{(x-3)^2}{4}+(y-1)^2=1$ 上の動点 P(x, y) があります。このとき，内積 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{AP}$ の最大値として正しいものを，(1)〜(4)の中から１つ選びなさい。

(1) $\sqrt{5}$　　(2) 6　　(3) $\sqrt{37}$　　(4) $2\sqrt{10}$



P(x, y) とおくと

$\overrightarrow{OA}=(3, 1)$

$\overrightarrow{AP}=(x-3, y-1)$

$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{AP}=3(x-3)+1(y-1)$

$=3x+y-10=t$ とおいて

$y=-3x+10+t$

楕円の方程式に代入

$\frac{(x-3)^2}{4}+(-3x+9+t)^2=1$

$37x^2-(24t+222)x+(4t^2+72t+329)=0$

$D/4=-4t^2+148\geqq0$

接点を通る直線が最大最小より

$-4t^2+148=0$

$t=\pm\sqrt{37}$

したがって

$t=\sqrt{37}$

4　$\frac{1}{1\cdot2\cdot3}+\frac{1}{2\cdot3\cdot4}+\frac{1}{3\cdot4\cdot5}+\cdots\cdots+\frac{1}{18\cdot19\cdot20}$ の値として正しいものを，(1)〜(4)の中から１つ選びなさい。

(1) $\frac{189}{760}$　　(2) $\frac{191}{760}$　　(3) $\frac{189}{380}$　　(4) $\frac{191}{380}$

与式 $P=\sum_{n=1}^{18}\frac{1}{n(n+1)(n+2)}=\sum_{n=1}^{18}(\frac{a}{n}+\frac{b}{n+1}+\frac{c}{n+2})$ とおくと，

$a(n+1)(n+2)+bn(n+2)+cn(n+1)=1$

$(a+b+c)n^2+(3a+2b+c)n+2a=1$

恒等式より

$\begin{cases}a+b+c=0\\3a+2b+c=0\\2a=1\end{cases}$　　$a=\frac{1}{2}$　$b=-1$　$c=\frac{1}{2}$

したがって

$P=\sum_{n=1}^{18}(\frac{\frac{1}{2}}{n}+\frac{-1}{n+1}+\frac{\frac{1}{2}}{n+2})$

$=\frac{1}{2}\{(\frac{1}{1}-\frac{2}{2}+\frac{1}{3})+(\frac{1}{2}-\frac{2}{3}+\frac{1}{4})+(\frac{1}{3}-\frac{2}{4}+\frac{1}{5})+\cdots\cdots+(\frac{1}{18}-\frac{2}{19}+\frac{1}{20})\}$

$=\frac{1}{2}(1-1+\frac{1}{2}+\frac{1}{19}-\frac{2}{19}+\frac{1}{20})$

$=\frac{1}{2}\times\frac{189}{380}=\frac{189}{760}$

5　正の実数 a の小数部分を b とします。$a^2-2b^2=5$ のとき，a の値として正しいものを，(1)〜(4)の中から１つ選びなさい。

(1)　$5-\sqrt{5}$　　(2)　$1+\sqrt{3}$　　(3)　$1+\sqrt{2}$　　(4)　$4-\sqrt{3}$

$a>0$，$0<b<1$ より

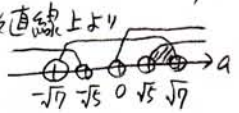
$a^2-2<a^2-2b^2<a^2$

$a^2-2<5<a^2$

$a^2-2<5$ より $-\sqrt{7}<a<\sqrt{7}$

$5<a^2$ より $a<-\sqrt{5}$，$\sqrt{5}<a$

数直線上より



$\sqrt{5}<a<\sqrt{7}$ …①

(1)の $5-\sqrt{5}=2.77\cdots$ ①の外

(2)の $1+\sqrt{3}=2.73\cdots$ ①の外

(3)の $1+\sqrt{2}=2.414\cdots$ ①の内

(4)の $4-\sqrt{3}=2.268\cdots$ ①の内

(3)より $(1+\sqrt{2})^2-2(\sqrt{2}-1)^2=-3+6\sqrt{2}\neq 5$

(4)より $(4-\sqrt{3})^2-2(2-\sqrt{3})^2=5$

6　saitama から３文字取ってできる順列は何通りありますか。正しいものを，(1)〜(4)の中から１つ選びなさい。

(1)　35通り　　(2)　60通り　　(3)　71通り　　(4)　73通り

s i
t m
a
a a

→ ①②③

(i) a以外

${}_4P_3=4\times3\times2=24$通り

(ii) aが1つ入ると

$3\times{}_4P_2=3\times4\times3=36$通り

(iii) aが2つ入ると

$3\times{}_4P_1=3\times4=12$通り

(iv) aが3つ入ると

1通り

したがって

$24+36+12+1=73$通り

7　媒介変数 t によって表される関数 $x=\dfrac{3}{1+t^2}$，$y=\dfrac{3t}{1+t^2}$ において，$t=1$ における $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ の値として正しいものを，(1)〜(4)の中から１つ選びなさい。

(1)　$-\dfrac{2}{3}$　　(2)　$-\dfrac{3}{4}$　　(3)　1　　(4)　$\dfrac{5}{6}$

$\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{-6t}{(1+t^2)^2}$

$\dfrac{dy}{dt}=\dfrac{3(1+t^2)-3t(2t)}{(1+t^2)^2}$

$=\dfrac{3-3t^2}{(1+t^2)^2}$

$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$

$=\dfrac{3-3t^2}{-6t}$

$=\dfrac{t^2-1}{2t}$

$\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{dy}{dx}\right)$

$=\dfrac{dt}{dx}\times\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{dy}{dx}\right)$

$=\dfrac{(1+t^2)^2}{-6t}\times\dfrac{2t(2t)-2(t^2-1)}{(2t)^2}$

$=\dfrac{(1+t^2)^3}{-12t^3}$

したがって

$t=1$ を代入

$\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{8}{-12}=-\dfrac{2}{3}$

8　λ を１の５乗根とします。$\alpha=\lambda+\dfrac{1}{\lambda}$ のとき，$\alpha^3+\alpha^2-\alpha$ の値として正しいものを，(1)〜(4)の中から１つ選びなさい。ただし，$\lambda\neq1$ とします。

(1)　-1　　(2)　0　　(3)　1　　(4)　2

$\lambda^5=1$

与式 $=\alpha^3+\alpha^2-\alpha$

$=\left(\lambda+\frac{1}{\lambda}\right)^3+\left(\lambda+\frac{1}{\lambda}\right)^2-\left(\lambda+\frac{1}{\lambda}\right)$

$=\dfrac{1}{\lambda^3}\left(\lambda^6+3\lambda^4+3\lambda^2+1+\lambda^5+2\lambda^3+\lambda-\lambda^4-\lambda^2\right)$

$\left.\begin{array}{l}\lambda^6=\lambda\\ \lambda^5=1\end{array}\right\}$ より →

$=\dfrac{1}{\lambda^3}\left(\lambda+1+2\lambda^4+2\lambda^3+2\lambda^2+\lambda+1\right)$

$=\dfrac{2}{\lambda^3}\left(\lambda^4+\lambda^3+\lambda^2+\lambda+1\right)$

$=\dfrac{2}{\lambda^3}\times\dfrac{\lambda^5-1}{\lambda-1}$ ← $\lambda^5=1$ より

$=\dfrac{2\times0}{\lambda^3(\lambda-1)}$

$=0$

9　3125^{2014} の最高位の数字として正しいものを，(1)〜(4)の中から１つ選びなさい。ただし，$\log_{10}2=0.3010$，$\log_{10}3=0.4771$ とします。

(1)　5　　(2)　6　　(3)　8　　(4)　9

$x=3125^{2014}$ とおく

$\log_{10}x=2014\times\log_{10}3125$

$=10070\times\log_{10}5$

$=10070\times(1-\log_{10}2)$

$=10070\times0.699$

$=7038.930$

桁数　数字

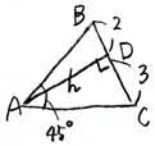
$\log_{10}8=3\times\log_{10}2=0.903$

$\log_{10}9=2\times\log_{10}3=0.9542$

$0.903<0.930<0.9542$ より 最高位の数字 8

10　鋭角三角形ABCにおいて∠A＝45°とします。頂点Aから辺BCへ垂線をおろし，その交点をDとするとき，BD＝2，DC＝3です。このとき，三角形ABCの面積として正しいものを，(1)〜(4)の中から１つ選びなさい。

(1)　10　　(2)　$\dfrac{15\sqrt{2}}{2}$　　(3)　15　　(4)　$15\sqrt{2}$



$AB=\sqrt{4+h^2}$

$AC=\sqrt{9+h^2}$

$AD=h$ とおくと

$h>0$

余弦定理より

$25=(4+h^2)+(9+h^2)-2\sqrt{4+h^2}\sqrt{9+h^2}\cos45^\circ$

$\sqrt{2}\sqrt{(4+h^2)(9+h^2)}=2h^2-12$ …①

2乗して $h^4-37h^2+36=0$

$(h^2-36)(h^2-1)=0$

$h=\pm6,\pm1$

$h>0$，①の右辺が正となるのは $h=6$

したがって

$S=\frac{1}{2}\times5\times6=15$

11　画びょうを８個投げるとき，針が上を向く個数を X とします。この画びょうの針が上を向く確率が $\dfrac{2}{3}$ であるとき，X の平均を m，標準偏差を σ として，確率 $P(|X-m|<\sigma)$ の値として正しいものを，(1)〜(4)の中から１つ選びなさい。

(1)　$\dfrac{1568}{2187}$　　(2)　$\dfrac{1792}{6561}$　　(3)　$\dfrac{2912}{6561}$　　(4)　$\dfrac{3584}{6561}$

二項分布 $B(8,\frac{2}{3})$ より

$m=8\times\frac{2}{3}=\frac{16}{3}$

$\sigma=\sqrt{8\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}}=\frac{4}{3}$

$m-\alpha<X<m+\alpha$ となる X は，

$\frac{12}{3}<X<\frac{20}{3}$

$4<X<6.6\cdots$ より，

$X=5,6$

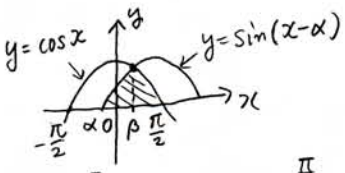
$P={}_8C_5\left(\frac{2}{3}\right)^5\left(\frac{1}{3}\right)^3+{}_8C_6\left(\frac{2}{3}\right)^6\left(\frac{1}{3}\right)^2$

$=\frac{1792}{6561}+\frac{1792}{6561}$

$=\frac{3584}{6561}$

12　曲線 $y=\cos x$　$\left(-\dfrac{\pi}{2}\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}\right)$ と x 軸とで囲まれる部分の面積が，曲線 $y=\sin(x-\alpha)$ によって２等分されるとき，α の値として正しいものを，(1)〜(4)の中から１つ選びなさい。ただし，$-\dfrac{\pi}{2}\leqq\alpha\leqq\dfrac{\pi}{2}$ とします。

(1)　$-\dfrac{\pi}{12}$　　(2)　$-\dfrac{\pi}{8}$　　(3)　$-\dfrac{\pi}{6}$　　(4)　$-\dfrac{\pi}{4}$



$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,dx=\left[\sin x\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}$

$=2$

$\cos\beta=\sin(\beta-\alpha)$ となる β をとると，

$\cos\beta-\sin(\beta-\alpha)=0$ …①

$\int_{\alpha}^{\beta}\sin(x-\alpha)\,dx+\int_{\beta}^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,dx=1$ より

$1-\cos(\beta-\alpha)+1-\sin\beta=1$

$\cos(\beta-\alpha)+\sin\beta=1$ …②

①②を連立して

$\cos\beta\cos(\beta-\alpha)+\sin\beta\sin(\beta-\alpha)=\cos\beta$

$\cos\alpha=\cos\beta$

$\alpha\neq\beta$ より $\alpha=-\beta$

①に代入して

$\cos\beta=\sin2\beta=2\sin\beta\cos\beta$ より

$\sin\beta=\frac{1}{2}$　$\beta=\frac{\pi}{6}$

したがって

$\alpha=-\frac{\pi}{6}$