1　「数学Ⅰ」の授業で，次の題材を取り扱う場合の授業展開例を示しなさい。また，その際の指導上の留意点及び評価も書きなさい。

> 点$(1,2)$を頂点として，点$(3,6)$を通る放物線をグラフとする２次関数を求めなさい。

標準形を利用して式をつくり，通る点の座標を代入したものは，式を満足すること示しながら２次関数を指導していく。

2　xについての方程式　$4\sin^2 x+\cos 2x-2\cos x+2a-2=0$ が，$0\leqq x\leqq \pi$ において相異なる２つの実数解をもつとき，実数aの値の範囲を求めなさい。

公式 $\begin{cases}\sin^2 x=1-\cos^2 x\\ \cos 2x=2\cos^2 x-1\end{cases}$

より

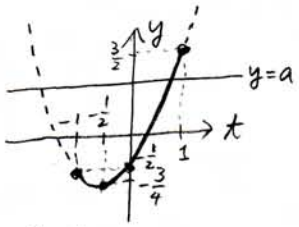
$4(1-\cos^2 x)+(2\cos^2 x-1)-2\cos x+2a-2=0$

$-2\cos^2 x-2\cos x+2a+1=0$

$a=\cos^2 x+\cos x-\frac{1}{2}$

$\cos x=t$ とおくと，$0\leqq x\leqq \pi$ より $-1\leqq t\leqq 1$

$\begin{cases}y=t^2+t-\frac{1}{2}=(t+\frac{1}{2})^2-\frac{3}{4}\\ y=a\end{cases}$



図より

$a>\frac{3}{2}$ のとき，実数解なし

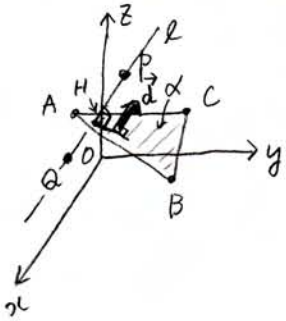
$\frac{3}{2}\geqq a>-\frac{1}{2}$ のとき，実数解1つ

$-\frac{1}{2}\geqq a>-\frac{3}{4}$ のとき，実数解2つ

$a=-\frac{3}{4}$ のとき，実数解1つ

したがって $-\frac{1}{2}\geqq a>-\frac{3}{4}$

3　座標空間に，４点 A$(1,0,2)$，B$(1,2,0)$，C$(0,2,1)$，P$(1,1,4)$があります。３点A，B，Cを通る平面に関して，点Pと対称な点をQとするとき，点Qの座標を求めなさい。



平面αの方程式は

$ax+by+cz=1$ として

3点A, B, Cの座標を代入して

$\begin{cases}a+2c=1\\ a+2b=1\\ 2b+c=1\end{cases}$

$a=b=c=\frac{1}{3}$

平面αの式は

$x+y+z=3$

となる。

この平面αに垂直なベクトル$\vec{d}$は，

$\vec{d}=(1,1,1)$

平面αに垂直に直線lが点Pを通るとして，その足をH(x,y,z)とすると，

P$(1,1,4)$より

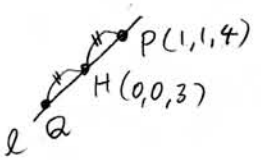
$\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-4}{1}$

$x=y$，$z=x+3$

平面αの式に代入して，

$x+x+(x+3)=3$

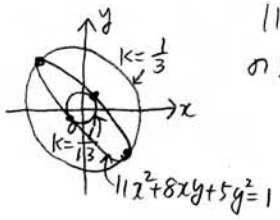
$x=0,\ y=0,\ z=3$



図より

点Q$(-1,-1,2)$

4 実数 x，y が $11x^2+8xy+5y^2=1$ を満たしながら動くとき，x^2+y^2 の最大値，最小値を求めなさい。また，そのときの x，y の値を求めなさい。



$11x^2+8xy+5y^2=1$ と $x^2+y^2=k$

の接点で傾きが一致するから

$22x+8y+8x\frac{dy}{dx}+10y\frac{dy}{dx}=0$

$\frac{dy}{dx}=\frac{-11x-4y}{4x+5y}$

$2x+2y\frac{dy}{dx}=0$

$\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y}$

したがって

$\frac{-11x-4y}{4x+5y}=-\frac{x}{y}$

$4x^2-6xy-4y^2=0$

$2(2x+y)(x-2y)=0$

(i) $2x+y=0$ のとき

$11x^2+8xy+5y^2=1$ より

$11x^2-16x^2+20x^2=1$

$15x^2=1$,

$x^2=\frac{1}{15}$

$k=x^2+y^2$

$=5x^2$

$=5\times\frac{1}{15}=\frac{1}{3}$

(ii) $x-2y=0$ のとき

$11x^2+8xy+5y^2=1$ より

$44y^2+16y^2+5y^2=1$

$65y^2=1$

$y^2=\frac{1}{65}$

$k=x^2+y^2$

$=5y^2$

$=5\times\frac{1}{65}=\frac{1}{13}$

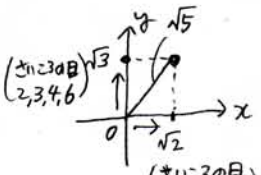
したがって

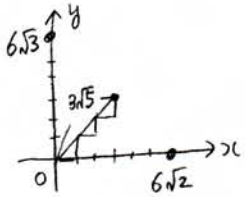
最大値 $\frac{1}{3}$，最小値 $\frac{1}{13}$

5 座標平面上で動点Pは，原点Oを出発して，次のような規則で動くものとします。さいころを1回振って出た目の数が5の約数であるとき，x 軸の正の方向に $\sqrt{2}$ だけ進み，その他の目が出たとき，y 軸の正の方向に $\sqrt{3}$ だけ進みます。この規則にしたがって，さいころを6回振ったとき，次の問いに答えなさい。

(1) 原点Oから点Pまでの距離が最大となる点Pの座標と，最小となる点Pの座標を求めなさい。また，それぞれの点に到達する確率を求めなさい。

(2) 点Pの到達する確率が最大になるような点Pの座標を求めなさい。





横 α，縦 β とすると，さいころを6回投げると

$\alpha=\sqrt{2}$，$\beta=\sqrt{3}$ より

α	β	
0	6	$6\sqrt{3}=\sqrt{108}$
1	5	$\sqrt{2+75}=\sqrt{77}$
2	4	$\sqrt{8+48}=\sqrt{56}$
3	3	$\sqrt{18+27}=\sqrt{45}$
4	2	$\sqrt{32+12}=\sqrt{44}$
5	1	$\sqrt{50+3}=\sqrt{53}$
6	0	$6\sqrt{2}=\sqrt{72}$

確率の計算は

$P(\alpha)={}_6C_\alpha\left(\frac{2}{6}\right)^\alpha\left(\frac{4}{6}\right)^{6-\alpha}$ より

$P(0)=\left(\frac{2}{3}\right)^6=\frac{64}{729}$ など

したがって

(1) 最大 $P(0,6\sqrt{3})$，$\frac{64}{729}$

最小 $P(4\sqrt{2},2\sqrt{3})$，$\frac{20}{243}$

(2) $P(2\sqrt{2},4\sqrt{3})$，$\frac{80}{243}$

6 媒介変数 t によって表される関数 $\begin{cases}x=2\sin t\\ y=\sin 2t\end{cases}$ $\left(0\leqq t\leqq\frac{\pi}{2}\right)$ が描く曲線をCとおき，x 軸と曲線Cで囲まれる図形をDとします。このとき，次の問いに答えなさい。

(1) y を x の式で表しなさい。

(2) 図形Dの面積を求めなさい。

(3) 図形Dを y 軸のまわりに1回転させてできる回転体の体積を求めなさい。

(1) $y=\sin 2t$

$=2\sin t\cos t$

$=2\sin t\sqrt{1-\sin^2 t}$

$=\frac{1}{2}\times 2\sin t\times\sqrt{4-(2\sin t)^2}$

$=\frac{1}{2}x\sqrt{4-x^2}$

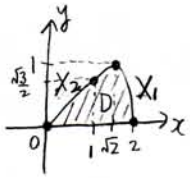
$0\leqq t\leqq\frac{\pi}{2}$ より，$0\leqq x\leqq 2$

(2) 微分して

$y'=\left(\frac{1}{2}x\sqrt{4-x^2}\right)'$

$=\frac{2-x^2}{\sqrt{4-x^2}}$

x	0	…	$\sqrt{2}$	…	2
y'		+	0	−	
y	0	↗	1	↘	0



Dの面積 $S=\int_0^2\frac{1}{2}x\sqrt{4-x^2}\,dx$

$=\left[-\frac{1}{6}(4-x^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^2$

$=0+\frac{1}{6}\times 4^{\frac{3}{2}}=\frac{8}{6}=\frac{4}{3}$

(3) $2y=x\sqrt{4-x^2}$

2乗して

$4y^2=x^2(4-x^2)$

$x^4-4x^2+4y^2=0$

$x^2=X$ とおいて

$X^2-4X+4y^2=0$

$X=2\pm\sqrt{4-4y^2}$

$V=\pi\int_0^1 x_1^2\,dy-\pi\int_0^1 x_2^2\,dy$

$=\pi\int_0^1(X_1-X_2)\,dy$

$=\pi\int_0^1 2\sqrt{4-4y^2}\,dy$

$=4\pi\underbrace{\int_0^1\sqrt{1-y^2}\,dy}_{\text{半径1の四分円}}=4\pi\times\frac{\pi}{4}=\pi^2$