1　「数学Ⅰ」の授業で，次の内容を取り扱う場合の授業展開例を示しなさい。また，その際の指導上の留意点及び評価も書きなさい。

θが鈍角で，$\sin\theta = \dfrac{2}{3}$のとき，$\cos\theta$の値を求めなさい。

この内容は、θの鈍角についてと、三角比の相互関係について学習したあとで、学ぶので、指導は困難である。一般に言う授業展開例は、進学を意識した教師または教師成り立てのころの「数学指導」論としてはそれで良いが、生徒の理解の困難さに目を向ける「数学教育」指導論としては不十分と言わざるをえない。

二辺の比からスタートした三角比では、鈍角の場合は説明に窮することになる。三角関数のθとx座標，y座標の関係を説明の中に取り入れ、その演習の時間が必要となる。また、そうすることで、sinθとcosθの関係も見えてくる。その計算の中に三平方の定理が登場するが、この三平方の定理は、中学校の数学の理解に苦労した項目なので、この演習にも時間をさかざるをえない。

そしてはじめて三角比の相互関係の公式の利用が理解できるのだが、暗記式だと計算力はつくが、三角比の学習にとっては不十分と言わざるをえない。

この授業展開例を示せという問は、困難を意識した教師にとって、その難解さを吐露する場所として絶好のチャンスであり、そうすることが「数学教育」に真摯に取り組んでいることを示すことができると思う。

そう言う教師こそ、私は合格にしたいと思っている。ただ「数学」が解けるだけの教師になってほしくはない。

2 k を定数とします。x についての２次方程式 $x^2-3kx+k^2+2k+1=0$ が異なる２つの実数解 α,β をもつとき，$\alpha^2-3\alpha\beta+\beta^2$ の取り得る値の範囲を求めなさい。

$$x^2-3kx+k^2+2k+1=0$$

$$x^2-3kx+(k^2+2k+1)=0$$

異なる２つの実数解 α,β とすると，解と係数の関係より

$$\begin{cases}\alpha+\beta=3k\\ \alpha\beta=k^2+2k+1\end{cases}$$

与式 $P=\alpha^2-3\alpha\beta+\beta^2$

$$=(\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2)-2\alpha\beta-3\alpha\beta$$

$$=(\alpha+\beta)^2-5\alpha\beta$$

$$=(3k)^2-5(k^2+2k+1)$$

$$=4k^2-10k-5$$

$$=4\left(k-\frac{5}{4}\right)^2-\frac{45}{4}$$

また，異なる２つの実数解をもつので，判別式より

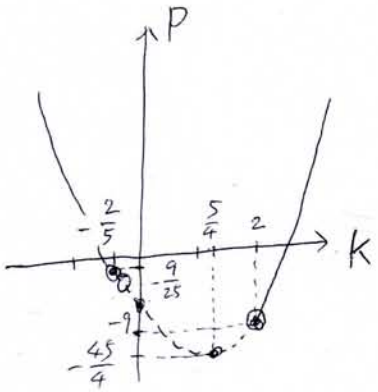
$$D=(-3k)^2-4(k^2+2k+1)>0$$

$$5k^2-8k-4>0$$

$$(5k+2)(k-2)>0$$

$$k<-\frac{2}{5},\ 2<k$$

グラフをかくと，



$$P\left(-\frac{2}{5}\right)=4\left(-\frac{2}{5}-\frac{5}{4}\right)^2-\frac{45}{4}=-\frac{9}{25}$$

$$P(2)=4\left(2-\frac{5}{4}\right)^2-\frac{45}{4}=-9$$

したがって

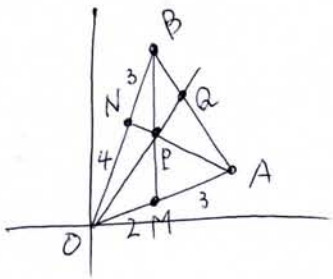
$$P>-9 \quad \cdots\cdots \left(-\frac{45}{4}\right)$$

3　△OABにおいて，辺OAを2：3に内分する点をM，辺OBを4：3に内分する点をNとし，線分ANと線分BMの交点をPとします。また，直線OPと辺ABの交点をQとします。このとき，次の問いに答えなさい。

(1) $\overrightarrow{OQ}$ を $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$ を用いて表しなさい。

(2) 面積比 △OAP：△ABP：△BOP を求めなさい。

図を書くと.



(1) チェバの定理より

$$\frac{BQ}{QA} \times \frac{AM}{MO} \times \frac{ON}{NB} = 1$$

$$\frac{BQ}{QA} \times \frac{3}{2} \times \frac{4}{3} = 1$$

$$\frac{BQ}{QA} = \frac{1}{2} \qquad BQ : QA = 1 : 2$$

$$\overrightarrow{OQ} = \frac{1 \cdot \overrightarrow{OA} + 2 \cdot \overrightarrow{OB}}{1+2} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{OB} \quad \cdots (答)$$

(2) 同じ高さの三角形の面積の比は底辺の比に等しいから.

$$\triangle OAP : \triangle OBP = \triangle OAQ : \triangle OBQ$$
$$= AQ : QB$$
$$= 2 : 1 \quad \cdots ①$$

$$\triangle ABP : \triangle AOP = \triangle ABN : \triangle AON$$
$$= BN : NO$$
$$= 3 : 4 \quad \cdots ②$$

したがって.

△OAP が共通しているので

①を2倍して.

$$\triangle OAP : \triangle OBP = 4 : 2 \quad \cdots ③$$

②と③より.

$$\triangle OAP : \triangle ABP : \triangle BOP = 4 : 3 : 2 \quad \cdots (答)$$

4 $x>0$, $y>0$ とします。$x+4y=\frac{1}{2}$ が成立するとき，次の問いに答えなさい。

(1) 等式 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{ay}{x}+\frac{bx}{y}+c$ が x, y についての恒等式となるように，定数 a, b, c の値を定めなさい。

(2) $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$ の最小値とそのときの x, y の値を求めなさい。

(1) $x+4y=\frac{1}{2}$ より $x=\frac{1}{2}-4y$

恒等式の左辺 $=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{\frac{1}{2}-4y}+\frac{1}{y}=\frac{2y+(1-8y)}{(1-8y)y}$

$=\frac{1-6y}{y(1-8y)}$

恒等式の右辺 $=\frac{ay}{x}+\frac{bx}{y}+c=\frac{2ay^2+b(\frac{1}{2}-4y)(1-8y)}{(1-8y)y}+c$

$=\frac{2ay^2+\frac{1}{2}b-4by-4by+32by^2+cy-8cy^2}{y(1-8y)}$

恒等式なので分子どうしを比較して

$1-6y=(2a+32b-8c)y^2+(-4b-4b+c)y+\frac{1}{2}b$

$$\begin{cases} 2a+32b-8c=0 \\ -8b+c=-6 \\ \frac{1}{2}b=1 \end{cases}$$

$b=2$, $c=10$, $a=8$

(答) $a=8$, $b=2$, $c=10$

(2) 相加相乗平均より

$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{8y}{x}+\frac{2x}{y}+10$

$\geqq 2\sqrt{\frac{8y}{x}\times\frac{2x}{y}}+10$

$=2\sqrt{16}+10$

$=18$

(答) 最小値 18

最小値の18になるのは，$\frac{8y}{x}=\frac{2x}{y}$ のときだから

$8y^2=2x^2$

$x^2-4y^2=0$

$(x-2y)(x+2y)=0$

$x=2y$, $x=-2y$

$x>0$, $y>0$ より

$x=2y$

$x+4y=\frac{1}{2}$ に代入して

$6y=\frac{1}{2}$ $\therefore y=\frac{1}{12}$

$x+\frac{1}{3}=\frac{1}{2}$ $\therefore x=\frac{1}{6}$

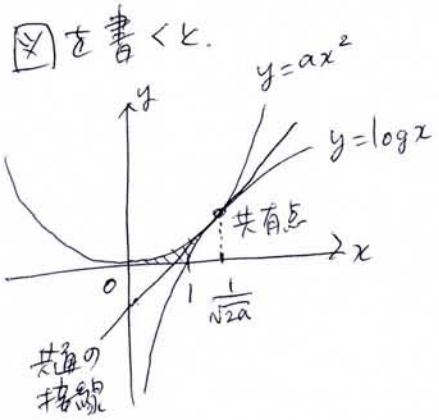
(答) $x=\frac{1}{6}$, $y=\frac{1}{12}$

5　2曲線 $y=\log x$，$y=ax^2$ が共有点をもち，その点において共通の接線をもつとき，次の問いに答えなさい。

(1) 定数 a の値を求めなさい。

(2) 2曲線と x 軸とで囲まれた部分の面積 S を求めなさい。

図を書くと.



(1) 微分して.

$y'=\frac{1}{x}$

$y'=2ax$

傾きが一致する点の x 座標は.

$\frac{1}{x}=2ax$

$x=\pm\frac{1}{\sqrt{2a}}$

真数 $x>0$ より　$x=\frac{1}{\sqrt{2a}}$

共有点の y 座標は.

$y=a\left(\frac{1}{\sqrt{2a}}\right)^2=\frac{1}{2}$　　$y=\log\frac{1}{\sqrt{2a}}=-\frac{1}{2}\log 2a$

したがって.

$\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}\log 2a$

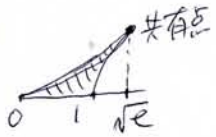
$\log 2a=-1$

$2a=e^{-1}=\frac{1}{e}$

$\therefore\ a=\frac{1}{2e}$

(答) $a=\frac{1}{2e}$

(2)



$x=\frac{1}{\sqrt{2a}}=\frac{1}{\sqrt{2\times\frac{1}{2e}}}=\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{e}}}=\sqrt{e}$

$S_1=\int_0^{\sqrt{e}}\left(\frac{1}{2e}x^2\right)dx=\frac{1}{6e}\left[x^3\right]_0^{\sqrt{e}}=\frac{\sqrt{e}}{6}$

$S_2=\int_1^{\sqrt{e}}\log x\,dx=\left[x\log x\right]_1^{\sqrt{e}}-\int_1^{\sqrt{e}}x\times\frac{1}{x}\,dx$

$=\sqrt{e}\log\sqrt{e}-0-\left[x\right]_1^{\sqrt{e}}$

$=\frac{1}{2}\sqrt{e}-\sqrt{e}+1$

$=1-\frac{1}{2}\sqrt{e}$

題意の面積 $S=S_1-S_2=\frac{\sqrt{e}}{6}-\left(1-\frac{1}{2}\sqrt{e}\right)=\frac{4}{6}\sqrt{e}-1=\frac{2}{3}\sqrt{e}-1$

(答) $S=\frac{2}{2}\sqrt{e}-1$

6　関数 $f(x)$ を，$f(x)=\begin{cases}0 & (0 \leqq x < 2)\\ \frac{1}{2}x^2-2 & (2 \leqq x \leqq 4)\end{cases}$ と定めます。

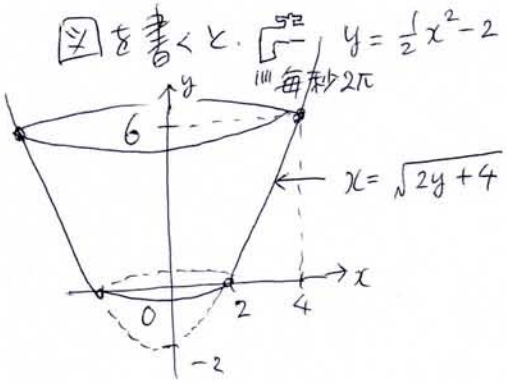
$y=f(x)$ を y 軸の周りに 1 回転してできる曲面の形をした容器に毎秒 2π の割合で水を注ぐとき，次の問いに答えなさい。

(1) 容器が水で満たされるのは，何秒後か求めなさい。

(2) 水を注ぎ始めてから 6 秒後における水面が上昇する速度を求めなさい。

(3) 水を注ぎ始めてから 6 秒後における水面の半径が増大する速度を求めなさい。

図を書くと．



(1) 積分して回転体の体積を求めると．

$$V=\pi\int_0^6(\sqrt{2y+4})^2dy$$

$$=\pi\left[y^2+4y\right]_0^6=60\pi$$

毎秒2πで注水するから

$$2\pi t=60\pi$$

$$t=30$$

(答) 30秒後

(2) 6秒後の水面の高さを h とすると．

$$2\pi\times6=\pi(h^2+4h)$$

$$h^2+4h-12=0$$

$$(h+6)(h-2)=0$$

$$h=-6,\ 2$$

$h>0$ より　$h=2$

時間 t と水面の高さ h の関係は．

$$2\pi t=\pi(h^2+4h)$$

時間 t で微分して．

$$2\pi=\pi(2h+4)\frac{dh}{dt}$$

$$\frac{dh}{dt}=\frac{1}{h+2}$$

$h=2$ における上昇する速度は

$$\left(\frac{dh}{dt}\right)_{h=2}=\frac{1}{2+2}=\frac{1}{4}$$

(答) 毎秒 $\frac{1}{4}$

(3) 6秒後の半径を r とすると．

$x=\sqrt{2y+4}$ より

$$r^2=2h+4$$

時間 t で微分して．

$$2r\frac{dr}{dt}=2\frac{dh}{dt}$$

$$\frac{dr}{dt}=\frac{1}{r}\times\frac{dh}{dt}$$

$h=2$ のときの r は　$r>0$ より

$r^2=4+4=8$　$r=2\sqrt{2}$

$h=2$ における半径の増大する速度は

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)_{h=2}=\frac{1}{2\sqrt{2}}\times\left(\frac{dh}{dt}\right)_{h=2}$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{2}}\times\frac{1}{4}$$

$$=\frac{1}{8\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{16}$$

(答) 毎秒 $\frac{\sqrt{2}}{16}$