近数協 第34回 冬期合宿研究会 （京都）

2004－12.27 （中学校 分科会）

素因数分解の一意性 の説明

私は 家庭教師で 小学5年生に 素数と合成数、最大公約数と最小公倍数 を教えています。

例題を かきますと、

次の □ に 数を入れよ （分解）
$35=\square\times\square$、$36=\square\times\square$、$37=\square\times\square$

$35=\boxed{5}\times\boxed{7}$、$36=\boxed{4}\times\boxed{9}$、$\boxed{6}\times\boxed{6}$ その他

2数の積になれば なんでも良ろしい。

$37=$ 、これは 1×37 ですが

37が小さくならないので 分解とは いいません

もちろん 整数の範囲です。

37のように分解できない数を 素数（そすう） といいます。

・何かの形で 2つに分解できる数は 合成数（ごうせいすう） です

2以上の数は 素数か合成数のどちらかになりますが

1は 素数でも 合成数でも ありません。

次の数のうち 分解できるものは 分解せよ。
2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. 10. 11.
12. 13. 14. 15. 16. 17. 18. 19. 20.

$2=$ 、$3=$ 、$4=2\times2$、$5=$ 、$6=2\times3$

$7=$ 、$8=2\times4$、$9=3\times3$、$10=2\times5$、$11=$ 、

$12=3\times4$、$13=$ 、$14=2\times7$、$15=3\times5$

$16=2\times8$、$17=$ 、$18=3\times6$、$19=$ 、$20=4\times5$

分解できないもの 2.3.5.7.11.13.17.19

これが 20以下の素数で

あと残りは 20以下の合成数です

2以上 100以下の数で、次の数を全部かけ

(1) 2で割り切れる数
(2) 3で割り切れる数
(3) 5で割り切れる数
(4) 7で割り切れる数

(1). 2. 4. 6. 8. 10. 12. 14. 16. 18. 20. 22. 24. 26. 28.
30. 32. 34. 36. 38. 40. 42. 44. 46. 48. 50. 52. 54.
56. 58. 60. 62. 64. 66. 68. 70. 72. 74. 76. 78. 80.
82. 84. 86. 88. 90. 92. 94. 96. 98. 100.

(2). 3. 6. 9. 12. 15. 18. 21. 24. 27. 30. 33. 36. 39.
42. 45. 48. 51. 54. 57. 60. 63. 66. 69. 72. 75.
78. 81. 84. 87. 90. 93. 96. 99.

(3). 5. 10. 15. 20. 25. 30. 35. 40. 45. 50.
55. 60. 65. 70. 75. 80. 85. 90. 95. 100.

(4). 7. 14. 21. 28. 35. 42. 49. 56. 63.
70. 77. 84. 91. 98.

2以上 100以下の数で、次の数をかけ
まず 2. 3. 5. 7 をかいて、それにつづいて
2でも3でも5でも7でも割れない数を全部かけ

2. 3. 5. 7. つづいて 2から100までの数で
まえの問題の答にでてこない数をかきます。

2. 3. 5. 7. 11. 13. 17. 19. 23. 29. 31. 37. 41. 43.
47. 53. 59. 61. 67. 71. 73. 79. 83. 89. 97.

これが 100以下の素数で、25個あります。

話を簡単にするために、100以下に限って
考えましたが、もちろん100以上の素数もたくさんあります。

素数は無数にあることが証明されますが
その数が素数かどうかを判定する簡単な方法はありません。

つぎに話を 最大公約数，最小公倍数に

考えましょう

約数，倍数では 1を含めて，1以上の数で考えます.

次の数について．約数をあるだけ全部かけ．

1．2．3．4．5．6．7．8．9．10．11．12．13．14．15．16．17．18．

1の約数	1.	10の約数	1.2.5.10
2の約数	1.2	11の約数	1.11.
3の約数	1.3.	12の約数	1.2.3.4.6.12
4の約数	1.2.4	13の約数	1.13
5の約数	1.5	14の約数	1.2.7.14
6の約数	1.2.3.6	15の約数	1.3.5.15
7の約数	1.7.	16の約数	1.2.4.8.16
8の約数	1.2.4.8.	17の約数	1.17.
9の約数	1.3.9	18の約数	1.2.3.6.9.18.

約数の個数が1個のもの　1.

約数の個数が2個のもの　2.3.5.7.11.13.17

（素数）

約数の個数が3個以上のもの

4．6．8．9．10．12．14．15．16．18（合成数）

12と18の最大公約数を求めよ．

12と18の公約数

12の約数	1	2	3	4	6	12
18の約数	1	2	3	6	9	18

12と18の最大公約数は 6です.

12と18の最小公倍数を求めよ.

$$\begin{array}{r|rr} 2 & 12 & 18 \\ \hline 3 & 6 & 9 \\ \hline & 2 & 3 \end{array}$$

12と18の最小公倍数は

$(2\times3)\times2\times3=36$ です.

約数の集合は有限集合です.

倍数の集合は無限集合ですから

倍数，公倍数は有限個になりません.

しかし，2つの異なる数AとBの最小公倍数は

有限の数で A×B以下の数になります.

これだけの準備をして、少し飛躍しますが

次の問題をみてみましょう

[平成14年度(2002年) センター試験

(追試験) 数学I $\boxed{3}$]

$\boxed{3}$ (1) 540を素因数分解すると $\boxed{ア}^3\boxed{イ}^2\boxed{ウ}$ である。

(2) 540の正の約数は、1と540を含めて

$\boxed{エオ}$ 個あり、それらの和は $\boxed{カキクケ}$ である。

(3) 540との最小公倍数が2700である自然数は

$\boxed{コサ}$ 個ある。

(4) 540以下の自然数のうち、2でも3でも

割りきれないものは $\boxed{シスセ}$ 個ある。

さらに、540との最大公約数が1であるものは

$\boxed{ソタチ}$ 個ある。

(02 センター試験追試・数I)

(1),(2),(4) の答をかきましょう

(1)

$$\begin{array}{r|l} 2 & 540 \\ 2 & 270 \\ 3 & 135 \\ 3 & 45 \\ 3 & 15 \\ & 5 \end{array}$$

$540 = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5$

$\boxed{3}^3\boxed{2}^2\boxed{5}$ である

(2) 場合の数と数列の和です。

$(1+2)(1+3)(1+1) = 3 \cdot 4 \cdot 2 = 24$ $\boxed{24}$ 個

$(1+2+2^2)(1+3+3^2+3^3)(1+5) = 7 \cdot 40 \cdot 6 = 1680$ $\boxed{1680}$ 個

(4) 集合の問題です

$540 - \{(540 \div 2) + (540 \div 3) - (540 \div 6)\}$

$= 540 - (270 + 180 - 90) = 540 - 360 = 180$ $\boxed{180}$ 個

$540 - \{(540 \div 2) + (540 \div 3) + (540 \div 5)$

$- (540 \div 6) - (540 \div 10) - (540 \div 15)$

$+ (540 \div 30)\}$

$= 540 - (270 + 180 + 108 - 90 - 54 - 36 + 18)$

$= 540 - 396 = 144$ $\boxed{144}$ 個

(3) は特にむつかしいので後回しにします。

まえに戻って

$\boxed{\text{12と18の最大公約数と最小公倍数を求めよ.}}$

最大公約数 6, 最小公倍数 36

逆の問題をやってみましょう

$\boxed{\text{最大公約数 6, 最小公倍数 36 の2数を求めよ.}}$

これは 12と18 のほかに 6と36 があります.

次の問題はどうでしょうか

$\boxed{\text{最大公約数 5, 最小公倍数 360 の2数を求めよ.}}$

2数AとBの最大公約数をG, 最小公倍数をLとすると

$$\begin{array}{r|cc} G & A & B \\ \hline & a & b \end{array}$$

(aとbはたがいに素)

$A = aG$, $B = bG$. $L = abG$

公式 $\boxed{AB = LG}$

このような式が成り立ちます.

これは $G=5$, $L=360$ で, AとBを求める問題です.

$L = abG$ より $ab = \dfrac{L}{G}$. $ab = \dfrac{360}{5} = 72$

$a < b$ とすると

$\begin{cases} a=1 \\ b=72 \end{cases}$ $\begin{cases} a=2 \\ b=36 \end{cases}$ $\begin{cases} a=3 \\ b=24 \end{cases}$ $\begin{cases} a=4 \\ b=18 \end{cases}$ $\begin{cases} a=6 \\ b=12 \end{cases}$ $\begin{cases} a=8 \\ b=9 \end{cases}$

ここで「aとbとはたがいに素」の条件があるので

$a=1$, $b=72$ と $a=8$, $b=9$ だけがのこります

$A=5$, $B=360$ または $A=40$, $B=45$

求める2数は 5と360 または 40と45 です

昔は最大公約数と最小公倍数を与えて

もとの2数を求める問題を

必ずやったものです

ここで まえのセンター試験の問題を少し変えて次のようにしてみましょう

> 540との最小公倍数が2700である自然数をすべて求めよ.

AとLが与えられていてBを求める問題です.

公式 $AB = LG$ より

$540B = 2700G$. $B = 5G \cdots ①$

$A = aG$ より $aG = 540 \cdots ②$

$$\begin{array}{r|ll} \multicolumn{1}{r}{} & A & B \\ \hline 5 & 540 & 5G \\ \hline & 108 & G \end{array}$$

$108 = 2^2 \cdot 3^3$

$a = 2^\alpha 3^\beta$

$\left(\begin{array}{l} \alpha = 0, 1, 2 \\ \beta = 0, 1, 2, 3 \end{array}\right)$

$\alpha=0$ $\beta=0$	$\alpha=1$ $\beta=0$	$\alpha=2$ $\beta=0$
$\alpha=0$ $\beta=1$	$\alpha=1$ $\beta=1$	$\alpha=2$ $\beta=1$
$\alpha=0$ $\beta=2$	$\alpha=1$ $\beta=2$	$\alpha=2$ $\beta=2$
$\alpha=0$ $\beta=3$	$\alpha=1$ $\beta=3$	$\alpha=2$ $\beta=3$

aの表

1	2	4
3	6	12
9	18	36
27	54	108

②より、Gの表

540	270	135
180	90	45
60	30	15
20	10	5

①より、Bの表

2700	1350	675
900	450	225
300	150	75
100	50	25

これでBがすべて求まりました. 12個です.

まだ、あやしいと思うなら験算をしてみましょう

$\alpha=0$, $\beta=0$
$$\begin{array}{r|ll} 540 & 540 & 2700 \\ \hline & 1 & 5 \end{array}$$
$G=540$. $L=2700$

$\alpha=1$, $\beta=0$
$$\begin{array}{r|ll} 270 & 540 & 1350 \\ \hline & 2 & 5 \end{array}$$
$G=270$. $L=2700$

$\alpha=2$, $\beta=0$
$$\begin{array}{r|ll} 135 & 540 & 675 \\ \hline & 4 & 5 \end{array}$$
$G=135$. $L=2700$

$\alpha=0$, $\beta=1$
$$\begin{array}{r|ll} 180 & 540 & 900 \\ \hline & 3 & 5 \end{array}$$
$G=180$. $L=2700$

$\alpha=1$, $\beta=1$
$$\begin{array}{r|ll} 90 & 540 & 450 \\ \hline & 6 & 5 \end{array}$$
$G=90$. $L=2700$

$\alpha=2$, $\beta=1$
$$\begin{array}{r|ll} 45 & 540 & 225 \\ \hline & 12 & 5 \end{array}$$
$G=45$. $L=2700$

$\alpha=0$, $\beta=2$
$$\begin{array}{r|ll} 60 & 540 & 300 \\ \hline & 9 & 5 \end{array}$$
$G=60$. $L=2700$

$\alpha=1$, $\beta=2$
$$\begin{array}{r|ll} 30 & 540 & 150 \\ \hline & 18 & 5 \end{array}$$
$G=30$. $L=2700$

$\alpha=2$
$\beta=2$

$$\begin{array}{r|ll} 15 & 540 & 75 \\ \hline & 36 & 5 \end{array}$$

$G=15$. $L=2700$.

$\alpha=0$
$\beta=3$

$$\begin{array}{r|ll} 20 & 540 & 100 \\ \hline & 27 & 5 \end{array}$$

$G=20$. $L=2700$

$\alpha=1$
$\beta=3$

$$\begin{array}{r|ll} 10 & 540 & 50 \\ \hline & 54 & 5 \end{array}$$

$G=10$. $L=2700$

$\alpha=2$
$\beta=3$

$$\begin{array}{r|ll} 5 & 540 & 25 \\ \hline & 108 & 5 \end{array}$$

$G=5$. $L=2700$

これで，確かに，Bの素の12個の数は

540との最小公倍数は2700です．

このほかには，540との最小公倍数が2700になる数はありませんから　これが答です．

個数だけを求めるのなら

$$\begin{array}{r|ll} 5 & 540 & 5G \\ \hline & 108 & G \end{array}$$

$108=2^2\cdot3^3$

$(1+2)(1+3)=12$　$\boxed{12}$個

これが平成14年度　センター試験追試験
数学I　$\boxed{3}$の(3)　の答です．

私も初めは間違ったので　大きな顔はできないのですが，　むつかしい問題です．

$\boxed{\text{252 と 275 はたがいに素であるか?}}$

これを考えてみましょう

$$\begin{array}{r|l} 2 & 252 \\ \hline 2 & 126 \\ \hline 3 & 63 \\ \hline 3 & 21 \\ \hline & 7 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 5 & 275 \\ \hline 5 & 55 \\ \hline & 11 \end{array}$$

$252=2^2\cdot3^2\cdot7$　　$275=5^2\cdot11$

252と275は素因数に分解したとき

共通な素数の因数を持ちません．

したがって，252と275はたがいに素です．

「最大公約数が1」というのは

「たがいに素」な2つの数のもつ性質です．

最後に、素因数分解の一意性とは何でしょう

昔の中学1年の教科書には

$$100 < \begin{matrix} 4 < \begin{matrix} 2 \\ 2 \end{matrix} \\ 25 < \begin{matrix} 5 \\ 5 \end{matrix} \end{matrix} \quad , \quad 100 < \begin{matrix} 10 < \begin{matrix} 2 \\ 5 \end{matrix} \\ 10 < \begin{matrix} 2 \\ 5 \end{matrix} \end{matrix}$$

100は2が2個と5が2個の積

というように、どんな分け方をしても $100=2^2\cdot5^2$

となるという説明があったときもありました。

しかしむつかしいのではぶかれて、中学高校から

一意性の説明はなくなってしまいました。

$$A=2^{\alpha_1}3^{\beta_1}5^{\gamma_1}7^{\delta_1}\cdots$$
$$B=2^{\alpha_2}3^{\beta_2}5^{\gamma_2}7^{\delta_2}\cdots$$ であるとき

$\alpha_1=\alpha_2,\ \beta_1=\beta_2,\ \gamma_1=\gamma_2,\ \delta_1=\delta_2,\ \cdots$ ならば

$A=B$ であることは明らかです。

逆に $A=B$ ならば $\alpha_1=\alpha_2,\ \beta_1=\beta_2,\ \gamma_1=\gamma_2,\ \delta_1=\delta_2\ \cdots$

が成り立つことの証明が

素因数分解の一意性の証明になります。

なお、1を素数に入れないのは

(1を素数に入れてしまうと素因数分解の
一意性が成り立たなくなるからだ)

という説明のある本を読んだように思います。

センター試験の感想として、

AとLからBを求める問題まで

出題されるようだと

A, B, L, Gの問題をそうとう本格的にやらないと

今の教科書や受験問題集程度では

ダメな気がしますね。

数学家庭教師

姫路　早川克彦

2004-11.29 記