

第2章

素数を利用する要素分析法 (案)

素因数分解の BASIC プログラム
(CASIO FX-890P)

```

5 CLEAR
10 PRINT "インスウゲンカイ N?"
20 INPUT "N=" ; N
30 PRINT "N=" ; N
40 A = INT (SQR N)
50 FOR I = 2 TO A
60 B = N / I
70 IF FRAC (B) = 0 THEN 100
80 NEXT I
90 PRINT N ; " (END)" : GOTO 5
100 PRINT I ; "*" ;
110 N = B
120 GOTO 40

```

N = 10 の数値の素因数分解の表

M = 1	55 5 × 11
M = 2	385 5 × 7 × 11
M = 3	3025 5 × 5 × 11 × 11
M = 4	25333 7 × 7 × 11 × 47
M = 5	220825 5 × 5 × 11 × 11 × 73
M = 6	1978405 5 × 11 × 13 × 2767
M = 7	18080425 5 × 5 × 11 × 11 × 43 × 139
M = 8	167731333 7 × 11 × 17 × 97 × 1321
M = 9	1574304985 5 × 11 × 11 × 109 × 23873

3

4

素因数分解による方法

M乗数の数列の和を求める

1から10までの和の

素因数分解の数値を使って

Jacob Bernoulli (1654-1705 スイス)さんは和の形で
分析しました。これ以前に、Johann Faulhaber
(1580-1635 ドイツ)さんは積の形で分析しました。このよ
うにして式を求めたのでしょうか。知りたくなります。

M=1の場合

(N)

1	1		
2	3	3	$3 = N+1$
3	6	$2 \cdot 3$	$3 = N$
4	10	$2 \cdot 5$	$5 = N+1$
5	15	$3 \cdot 5$	$5 = N$
6	21	$3 \cdot 7$	$7 = N+1$
7	28	$4 \cdot 7$	$7 = N$

$$N \cdot (N+1)$$

$$1 \times 2 = 2$$

N=1のとき1だから

$$\frac{1}{2} \cdot N \cdot (N+1)$$

5

6

M=2の場合

(N)

1	1	1		
2	4	5	5	$5 = 2N+1$
3	9	14	$2 \cdot 7$	$7 = 2N+1$
4	16	30	$2 \cdot 3 \cdot 5$	$5 = N+1$
5	25	55	$5 \cdot 11$	$5 = N$
6	36	91	$7 \cdot 13$	$11 = 2N+1$
7	49	140	$2^2 \cdot 5 \cdot 7$	$7 = N+1$
8	64	204	$2^2 \cdot 3 \cdot 17$	$13 = 2N+1$
9	81	285	$3 \cdot 5 \cdot 19$	$7 = N$
10	100	385	$5 \cdot 7 \cdot 11$	$19 = 2N+1$
				$11 = N+1$

$$\frac{N \cdot (N+1) \cdot (2N+1)}{1 \times 2 \times 3} = 6$$

$$\frac{1}{6} \cdot N \cdot (N+1) \cdot (2N+1)$$

M=3の場合

(N)

1	1	1		
2	8	9	3^2	$3^2 = (N+1)^2$
3	27	36	$2^2 \cdot 3^2$	$3^2 = N^2$
4	64	100	$2^2 \cdot 5^2$	$5^2 = (N+1)^2$
5	125	225	$3^2 \cdot 5^2$	$5^2 = N^2$
6	216	441	$3^2 \cdot 7^2$	$7^2 = (N+1)^2$
7	343	784	$2^4 \cdot 7^2$	$7^2 = N^2$
8	512	1296	$2^4 \cdot 3^4$	$3^4 = 9^2 = (N+1)^2$
9	729	2025	$3^4 \cdot 5^2$	$3^4 = 9^2 = N^2$
10	1000	3025	$5^2 \cdot 11^2$	$11^2 = (N+1)^2$

$$\frac{N^2 \cdot (N+1)^2}{1^2 \times 2^2} = 4$$

$$\frac{1}{4} \cdot N^2 \cdot (N+1)^2$$

M=4 の場合

(N)			
1	1	1	
2	16	17	17
3	81	98	$2 \cdot 7^2$
4	256	354	$2 \cdot 3 \cdot 59$
5	625	979	$11 \cdot 89$
6	1296	2275	$5^2 \cdot 7 \cdot 13$
7	2401	4676	$2^2 \cdot 7 \cdot 167$
8	4096	8772	$2^2 \cdot 3 \cdot 17 \cdot 43$
9	6561	15333	$3 \cdot 19 \cdot 269$
10	10000	25333	$7^2 \cdot 11 \cdot 47$

(N)		
1		
2	17	
3	$2 \cdot 7^2$	$7 = 2N+1$
4	$2 \cdot 3 \cdot 59$	
5	$11 \cdot 89$	$11 = 2N+1$
6	$5^2 \cdot 7 \cdot 13$	$7 = N+1$ $13 = 2N+1$
7	$2^2 \cdot 7 \cdot 167$	$7 = N$
8	$2^2 \cdot 3 \cdot 17 \cdot 43$	$17 = 2N+1$
9	$3 \cdot 19 \cdot 269$	$19 = 2N+1$
10	$7^2 \cdot 11 \cdot 47$	$11 = N+1$

$$N \cdot (N+1) \cdot (2N+1)$$

の要素があることがわかります。

N		$N \cdot (N+1) \cdot (2N+1)$
2	17	$2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$
3	7×5 2·7	$3 \cdot 4 \cdot 7 = 84$ $3 \times 2 = 6$ $30 \div 6 = 5$
4	59 2·3	$4 \cdot 5 \cdot 9 = 180$ $2 \times 5 \times 3 = 30$
5	89 11	$5 \cdot 6 \cdot 11 = 330$ $5 \times 6 = 30$
6	$5^2 \times 5$ 7·13	$6 \cdot 7 \cdot 13 = 546$ $6 = 6$ $30 \div 6 = 5$
7	167 $2^2 \cdot 7$	$7 \cdot 8 \cdot 15 = 840$ $2 \times 15 = 30$
8	43×5 $2^2 \cdot 3 \cdot 17$	$8 \cdot 9 \cdot 17 = 1224$ $2 \times 3 = 6$ $30 \div 6 = 5$
9	269 3·19	$9 \cdot 10 \cdot 19 = 1710$ $3 \times 10 = 30$
10	7×47 7·11	$10 \cdot 11 \cdot 21 = 2310$ $10 \times 3 = 30$

2	17	17
3	7×5	35
4	59	59
5	89	89
6	$5 \times 5 \times 5$	125
7	167	167
8	43×5	215
9	269	269
10	7×47	329

$$N=10 \quad 329 \rightarrow (3N^2 + 3N - 1)$$

$$N=2 \quad 3 \cdot 4 + 3 \cdot 2 - 1 = 12 + 6 - 1 = 17$$

$$\frac{1}{30} \cdot N \cdot (N+1) \cdot (2N+1) \cdot (3N^2 + 3N - 1)$$

$$N \cdot (N+1) \cdot (2N+1)$$

$$1 \times 2 \times 3 = 6$$

N=2 17 のとき

$$2 \times 3 \times 5 = 30$$

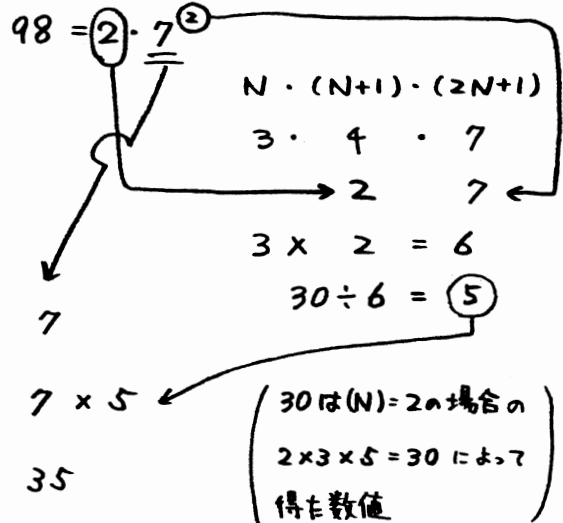
$$30 \div 6 = 5$$

N=10 329 を使って

$$3N^2 + 3N - 1$$

N=1 3 + 3 - 1 = 5

(N) = 3 の場合



$$98 = 2 \cdot 7^2$$

$$2 \cdot 7 \quad 3 \cdot 4 \cdot 7$$

$$3 \times 2 = 6$$

$$30 \div 6 = 5$$

$$7 \times 5 = 35$$

M=5の場合

(N)			
1	1	1	
2	32	33	3 · 11
3	243	276	2 ² · 3 · 23
4	1024	1300	2 ² · 5 ² · 13
5	3125	4425	3 · 5 ² · 59
6	7776	12201	3 · 7 ² · 83
7	16807	29008	2 ⁴ · 7 ² · 37
8	32768	61776	2 ⁴ · 3 ³ · 11 · 13
9	59049	120825	3 ³ · 5 ² · 179
10	100000	220825	5 ² · 11 ² · 73

(N)

1	1	
2	3 · 11	3 = N+1
3	2 ² · 3 · 23	3 = N
4	2 ² · 5 ² · 13	2 ² = 4 = N+1
5	3 · 5 ² · 59	5 ² = (N+1) ²
6	3 · 7 ² · 83	5 ² = N ²
7	2 ⁴ · 7 ² · 37	7 ² = (N+1) ²
8	2 ⁴ · 3 ³ · 11 · 13	7 ² = N ²
9	3 ³ · 5 ² · 179	
10	5 ² · 11 ² · 73	11 ² = (N+1) ²

$$N^2 \cdot (N+1)^2$$

の要素があることがわかります。

(N)		$N \cdot N \cdot (N+1) \cdot (N+1)$
2	11 3	$2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 = 12$ $2 \times 2 \times 3$
3	23 $2^2 \cdot 3$	$3 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 4 = 12$ 3×4
4	13×3 $2^2 \cdot 5^2$	$4 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 5 = 12$ $4 \times 5 \times 5$
5	59 $3 \cdot 5^2$	$5 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 6 = 12$ $6 \times 2 = 12$
6	83 $3 \cdot 7^2$	$6 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 7 = 12$ $6 \times 2 = 12$
7	37×3 $2^4 \cdot 7^2$	$7 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 8 = 12$ $4 \times 3 = 12$
8	$11 \cdot 13$ $2^4 \cdot 3^3$	$8 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 9 = 12$ $4 \times 3 = 12$
9	179 $3^2 \cdot 5^2$	$9 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 10 = 12$ $3 \times 2 \times 2 = 12$
10	73×3 $5^2 \cdot 11^2$	$10 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 11 = 12$ $2 \times 2 \times 3 = 12$

(N)		
2	11	11
3	23	23
4	13×3	39
5	59	59
6	83	83
7	37×3	111
8	11×13	143
9	179	179
10	73×3	219

$$N=10 \quad 219 \rightarrow 2N^2 + 2N - 1$$

$$N=2 \quad 2 \times 2^2 + 2 \times 2 - 1 = 8 + 4 - 1 = 11$$

$$\frac{1}{12} \cdot N^2 \cdot (N+1)^2 \cdot (2N^2 + 2N - 1)$$

M=6nの場合

(N)			
1	1	1	
2	64	65	$5 \cdot 13$
3	729	794	$2 \cdot 397$
4	4096	4890	$2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 13^2$
5	15625	20515	$5 \cdot 11 \cdot 373$
6	46656	67171	$13 \cdot 5167$
7	117649	184820	$2^2 \cdot 5 \cdot 9241$
8	262144	446964	$2^2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 17 \cdot 313$
9	531441	978405	$3 \cdot 5 \cdot 19 \cdot 3433$
10	1000000	1978405	$5 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 2767$

(N)		
2	$5 \cdot 13$	$5 = 2N + 1$
3	$2 \cdot 397$	
4	$2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 13^2$	$5 = N + 1$
5	$5 \cdot 11 \cdot 373$	$5 = N$
6	$13 \cdot 5167$	$11 = 2N + 1$
7	$2^2 \cdot 5 \cdot 9241$	$13 = 2N + 1$
8	$2^2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 17 \cdot 313$	$17 = 2N + 1$
9	$3 \cdot 5 \cdot 19 \cdot 3433$	$19 = 2N + 1$
10	$5 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 2767$	$11 = N + 1$

$$N \cdot (N+1) \cdot (2N+1)$$

の要素があることがわかります。

19

20

(N)		$N \cdot (N+1) \cdot (2N+1)$
2	13×7 5	$2 \cdot 3 \cdot 5 = 6$
3	397 2	$3 \cdot 4 \cdot 7 = 42$ ($42 \div 6 = 7$)
4	$13^2 \times 7$ 2 · 3 · 5	$4 \cdot 5 \cdot 9 = 6$ $42 \div 6 = 7$
5	373×7 5 · 11	$5 \cdot 6 \cdot 11 = 6$
6	5167 13	$6 \cdot 7 \cdot 13 = 42$ ($42 \div 6 = 7$)
7	9241 2 · 5	$7 \cdot 8 \cdot 15 = 42$
8	$7 \times 313 \times 7$ 2 · 3 · 17	$8 \cdot 9 \cdot 17 = 6$ $42 \div 6 = 7$
9	3433×7 3 · 5 · 17	$9 \cdot 10 \cdot 19 = 6$ $42 \div 6 = 7$
10	13×2767 5 · 11	$10 \cdot 11 \cdot 21 = 42$

(N)		
2	13×7	91
3	397	397
4	$13^2 \times 7$	1183
5	373×7	2611
6	5167	5167
7	9241	9241
8	$313 \times 7 \times 7$	15337
9	3433×7	24031
10	2767×13	35971

$$N=10 \quad 35971$$

をどう使うのか?

$$3N^4 + 6N^3 - N^2 + 7N + 1 \quad ?$$

$$3N^4 + 6N^3 - 3N + 1 \quad ?$$

21

22

$$3N^4 + 6N^3 - N^2 + 7N + 1$$

$$N=2 \quad \text{あたり}$$

$$3 \times 16 + 6 \times 8 - 4 + 7 \times 2 + 1 = 107$$

$$3N^4 + 6N^3 - 3N + 1$$

$$N=2 \quad \text{あたり}$$

$$3 \times 16 + 6 \times 8 - 3 \times 2 + 1 = 91$$

$$3N^4 + 6N^3 - 3N + 1 \quad \text{が成立}$$

$$\frac{1}{42} \cdot N \cdot (N+1) \cdot (2N+1) \cdot (3N^4 + 6N^3 - 3N + 1)$$

$$M=1$$

$$\frac{1}{2} \cdot N \cdot (N+1)$$

$$M=2$$

$$\frac{1}{6} \cdot N \cdot (N+1) \cdot (2N+1)$$

$$M=3$$

$$\frac{1}{4} \cdot N^2 \cdot (N+1)^2$$

$$M=4$$

$$\frac{1}{30} \cdot N \cdot (N+1) \cdot (2N+1) \cdot (3N^2 + 3N - 1)$$

$$M=5$$

$$\frac{1}{12} \cdot N^2 \cdot (N+1)^2 \cdot (2N^2 + 2N - 1)$$

$$M=6$$

$$\frac{1}{42} \cdot N \cdot (N+1) \cdot (2N+1) \cdot (3N^4 + 6N^3 - 3N + 1)$$