武田 利一 様

2012.6.17

林 邦英

埼玉県，愛知県の方より説明不足を注意されていますので、「M乗数の表の観察について」の作文を書きました。数学というよりも国語の授業のように思いました。一方で国語は、聞く，話す、読む、書くことが基本なので、数表を読むことも一つのテーマかと思います。

6月16日の朝日新聞の教育で、「小学生向け辞書」について書かれています。算数の場合はどうなるのかなと考えています。

5月29日の東海市平洲祭で、童門 冬二さんの講話を聞きました。「今を大切に生きること」というメッセージをいただきました。

季節の変わりめです。お体に気をつけて下さい。

M乗数の表の観察について

林　邦英

M乗数の表を作るきっかけは、平方数の表の一の位，十の位の数字にあらわれる回文構造が、3以上の乗数の場合はどのようになるのかと疑問を持ったことにあります。

奇数乗の場合は補完型（加えると10）

偶数乗の場合は対称型（同じ数字）

になることがわかりました。補完型と対称型は1/N（Nは素数）の循環節の長さを進法を変化させて調べた時にもあらわれました。

5型の素数（2^n+1型）は対称型

7型の素数（素数×2＋1型）は補完型

となりますが、よくわかりません。（注1）

M乗数の表の観察で新たにわかったことはN^5，N^9の場合にN（N'）と一の位が同じになることでした。一の位に着目して観察しました。

4つのパターンに分類できることがわかりました。

一の位のパターン

N^1 N^5 N^9 N^{4n+1}

N^2 N^6

N^3 N^7

N^4 N^8

なぜ周期が $4n+1$ なのかについて考えてみました。1/Nの循環節の長さを調べた時の経験が役に立ちました。(Nを素数に分解し素数ごとの循環節の長さを求め、それらの最小公倍数を求めるものです。同じ素数が2つ以上ある場合は、その数をかけます。これについては例外があります。$1\div487^2$)

10は2×5と分解できます。N^5 を5で割ると N^1 と同じになります。また N^4 を5で割ると1が並びます。これは N^0 の場合のパターンです。

$5-1=4$

$2-1=1$

$(1,4)=4$ (最小公倍数)

$4+1=5$ 拡張して $4n+1$

コクヨ ケ-35 20X20

このように考えました。

十進法以外の場合ではどうなるのかと思い10以外の数で割ったあまりを求めてみました。

素数の場合は、5の場合と同様にその数で割ればよいことはすぐにわかります。また1を引いた乗数を割るとN°のパターンになることを確かめることができます。

合成数の場合は、十進法の場合、$4n+1$乗数になることより.

6進法の場合は、

$6=2\times3$

$2-1=1$

$3-1=2$

$(1,2)=2$

$2+1=3$ 拡張して $2n+1$

N^3, N^5, N^7 の場合にN'と一の位が同じになることがわかります。

N^5を 15, 30で割ると ?

N^7を 14, 21で割ると ?

合成数で同じ素数が2つ以上ある場合は、きれいにN'のパターンにはなりませんでした。

N^7を9で割りました。

$9=3\times3$

$3-1=2$

$2\times3=6$

$6+1=7$

N^7を9で割ることになった計算式です。成分に3が2つありますので、2に3をかけます。

27で割る時は、$27=3\times3\times3$なので

$3-1=2$

$2\times3\times3=18$

$18+1=19$

N^{19}を27で割ります。

5^{19}を27で割ったあまりを求めます。十桁電卓を使った場合の計算例です。

$19=9+9+1$

$5^9=1953125$

1953125÷27=

72337.96296

小数部を27倍します。

25.99992 ≒ 26

26×26×5=3380

3380÷27=125.1851851

小数部を27倍します。

4.9999977 ≒ 5

あまりは5になりました。

山路 主住（1704－1772）さんの研究が役に立ちました。（注2）

N^3 を12=2×2×3で割ったあまりを求めました。

N	1	$\boxed{2}$	3	4	5	$\boxed{6}$	7	8
あまり	1	8	3	4	5	0	7	8
N	9	$\boxed{10}$	11	12	13	$\boxed{14}$	15	
あまり	9	4	11	0	1	8	3	

2^3, 6^3, 10^3 の場合の時に例外となりました。しかし、8+4=12という補完型は保たれています。

以上の観察より、

① 素数の場合は、N^0, N' のパターンがある。

② 合成数の場合で同じ素数がない場合、N' のパターンがある。

③ 合成数の場合で同じ素数が2つ以上ある場合は不完全な N' のパターンにしかならない。

3つの場合に分けることができることがわかりました。

(注1) 位数表は「数論入門」芹沢 正三著 (BLUE BACKS) P. 280－281 にあります。99までの自然数の逆数の表は「オイラーの贈物」吉田 武著 (ちくま学芸文庫) P. 433－434にあります。

(注2) 山路 主住さんの循環小数の研究は「学術を中心とした和算史上の人々」平山 諦著 (ちくま学芸文庫) P. 279－288に書いてあります。

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

視点を変えて観察すると

平方数の表（1^2より10^2）の観察

N		N^2
1	−4	1
2	−3	4
3	−2	9
4	−1	16
5	±0	25
6	+1	36
7	+2	49
8	+3	64
9	+4	81
10		100

差を求める

$3 = 2\times1+1$

$5 = 2\times2+1$

$7 = 2\times3+1$

$9 = 2\times4+1$

$11 = 2\times5+1$

$13 = 2\times6+1$

$15 = 2\times7+1$

$17 = 2\times8+1$

$19 = 2\times9+1$

$(5+a)^2 = 25 + 10a + a^2$　　$(N+1)^2 = N^2 + 2N + 1$

回文構造に着目する

No.

平方数の表 (N=1より N=100)

N	N²	N	N²
1	1	51	26 01
2	4	52	27 04
3	9	53	28 09
4	16	54	29 16
5	25	55	30 25
6	36	56	31 36
7	49	57	32 49
8	64	58	33 64
9	81	59	34 81
10	100	60	36 00
11	121	61	37 21
12	144	62	38 44
13	169	63	39 69
14	196	64	40 96
15	225	65	42 25
16	256	66	43 56
17	289	67	44 89
18	324	68	46 24
19	361	69	47 61
20	400	70	49 00
21	441	71	50 41
22	484	72	51 84
23	529	73	53 29
24	576	74	54 76
25	625	75	56 25
26	676	76	57 76
27	729	77	59 29
28	784	78	60 84
29	841	79	62 41
30	900	80	64 00
31	961	81	65 61
32	1024	82	67 24
33	1089	83	68 89
34	1156	84	70 56
35	1225	85	72 25
36	1296	86	73 96
37	1369	87	75 69
38	1444	88	77 44
39	1521	89	79 21
40	1600	90	81 00
41	1681	91	82 81
42	1764	92	84 64
43	1849	93	86 49
44	1936	94	88 36
45	2025	95	90 25
46	2116	96	92 16
47	2209	97	94 09
48	2304	98	96 04
49	2401	99	98 01
50	2500	100	100 00

M乗数の表

N	N^2	N^3	N^4	N^5	N^6	N^7	N^8	N^9
1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	4	8	16	32	64	128	256	512
3	9	27	81	243	729	2187	6561	19683
4	16	64	256	1024	4096	16384	65536	262144
5	25	125	625	3125	15625	78125	390625	1953125
6	36	216	1296	7776	46656	279936	1679616	10077696
7	49	343	2401	16807	117649	823543	5764801	40353607
8	64	512	4096	32768	262144	2097152	16777216	134217728
9	81	729	6561	59049	531441	4782969	43046721	387420489
10	100	1000	10000	100000	1000000	10000000	100000000	1000000000

M乗数の表

N	N^2	N^3	N^4	N^5	N^6	N^7	N^8	N^9
1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	4	8	16	32	64	128	256	512
3	9	27	81	243	729	2187	6561	19683
4	16	64	256	1024	4096	16384	65536	262144
5	25	125	625	3125	15625	78125	390625	1953125
6	36	216	1296	7776	46656	279936	1679616	10077696
7	49	343	2401	16807	117649	823543	5764801	40353607
8	64	512	4096	32768	262144	2097152	16777216	134217728
9	81	729	6561	59049	531441	4782969	43046721	387420489
10	100	1000	10000	100000	1000000	10000000	100000000	1000000000

N^1	N^2	N^3	N^4
N^5	N^6	N^7	N^8
N^9			

5で割ったあまりは?

7で割ったあまりは?

18で割ったあまりは?

M乗数の表

N	N^2	N^3	N^4	N^5	N^6	N^7	N^8	N^9
1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	4	8	16	32	64	128	256	512
3	9	27	81	243	729	2187	6561	19683
4	16	64	256	1024	4096	16384	65536	262144
5	25	125	625	3125	15625	78125	390625	1953125
6	36	216	1296	7776	46656	279936	1679616	10077696
7	49	343	2401	16807	117649	823543	5764801	40353607
8	64	512	4096	32768	262144	2097152	16777216	134217728
9	81	729	6561	59049	531441	4782969	43046721	387420489
10	100	1000	10000	100000	1000000	10000000	100000000	1000000000

N	2で割ったあまり	3で割ったあまり	6で割ったあまり	5で割ったあまり	7で割ったあまり	9で割ったあまり
1	1	1	1	1	1	1
2	0	2	2	2	2	2
3	1	0	3	3	3	0
4	0	1	4	4	4	4
5	1	2	5	0	5	5
6	0	0	0	1	6	0
7	1	1	1	2	0	7
8	0	2	2	3	1	8
9	1	0	3	4	2	0
10	0	1	4	0	3	1