武田 利一 様

2012.12.6

林 邦英

インターネットを使い、「数学・物理通信1巻4号」の矢野 忠さんの書かれた「二項定理2 4.3発見的方法」を見て武田 利一さんの「幻の0番法」と同じ考え方をみつけました。再度、武田さんの「幻の0番法」の説明を読み直しました。手元には「おどる数学 別解集 礒野 幸著 知泉書館」があります。P.109～P.113に「Newton(ニュートン)の式について」が書かれているからです。この本を最初に見た時、私の方法とのちがいしか見ることができませんでした。私の「研究レポート(2004.7.19)の「D M乗数の数列の和を求める 階差0項数列を使って」と何度も読みくらべました。

共通点は、数列の一般項を求めるために、階差を作り、0項に着目することでした。

ちがいは、n次関数として考えるのかM乗

数の数列の和をテーマとするのかにありました。私の方法には「幻の0番法」はでてきません。また、Newtonの式とも「一般化」の方法は異なるものでした。

　2000年の秋のことを少し思い出してみました。2000年の始めに、通信制の高校にかよう友人(3年以上勉強会をやりました。)より「数学ノート」を書いてほしいとたのまれて書いたのですが、「階差」の使い方がよくわかりませんでした。何次の式になるのかしかわからなかったのです。亀井さんの論文を読んで「0項」に着目することを知り、N、$N^2$、$N^3$の和とN、$N^2$、$N^3$に0項をつけ加えて数表を観察しました。なぜM乗数の表なのかというと、ファウル・ハーバーさんとベルヌーイさんの考え方のちがいを牧野書店の本を読んで気になっていたからです。また、M乗数の数列の和を求める式の研究は古くから行なわれていると思ったからです。

　パスカルの三角数を少し変形することで、

N, Nの和, $N^2$, $N^2$の和, $N^3$, $N^3$の和・・・・・を次々と求めることができることがわかりました。ところが、このことのもつ意味がまったくわかりませんでした。N, $N^2$, $N^3$・・・・・の階差数列を分析しました。パスカルの三角数と変形したパスカル三角数を使うことで、N, $N^2$, $N^3$・・・・・の階差数列を簡単に求めることができることがわかりました。

階差0項数列の変化の規則性を調べると、加法の一意性のあることがわかりました。階差0項数列の使い方では、N, $N^2$, $N^3$・・・・・の階差0項数列を利用して、n次の成分ごとに分解しました。この方法は一般のn次関数にも使えるものでした。

礒野さんの本より少し紹介します。『・・・・・"別解の魅力"であった。当初は、代数の問題は公式を駆使して代数の範疇で解答するものと考えていたが、全く別の視点から、図形を用いて解答したり、三角関数を用いて解答したりするのを先生に示され、目からうろこ

が落ちる思いがしたものである。』（P.121より、3行ほどを書き写しました。）

「Newtonの式について」の構成は、

① 2次関数は3段目が一定

② $x$の2次関数$f(x)$が$f(0)=3$，$f(1)=4$，$f(2)=9$を満たすとき$f(3)$を求めよ。

③ $x$の3次関数$f(x)$が$f(1)=1$，$f(2)=4$，$f(3)=9$，$f(4)=34$を満たすとき、$f(x)$を求めよ。また$f(5)$を求めよ。

このようになっています。

武田さんの「幻の0番法」の説明とそっくりです。ちがいは式の変形にあります。2次関数の場合

$f(x)=ax^2+bx+c$ ……①

$f_1(x)=f(x+1)-f(x)$

$f_2(x)=f_1(x+1)-f_1(x)$

とおくと

$$\begin{cases} f(0)=c & \cdots\cdots ② \\ f_1(0)=a+b & \cdots\cdots ③ \\ f_2(0)=2a & \cdots\cdots ④ \end{cases}$$

④から　$a = \dfrac{f_2(0)}{2}$

③から　$b = f_1(0) - \dfrac{f_2(0)}{2}$

②から　$c = f(0)$

したがって①式は

$$f(x) = \frac{f_2(0)}{2} + \left(f_1(0) - \frac{f_2(0)}{2}\right)x + f(0)$$

整理して

$$f(x) = f(0) + f_1(0)x + \frac{f_2(0)}{2}x(x-1)$$

同様に3次関数の場合も示し、一般化しています。

$$f(x) = f(0) + f_1(0)x + \frac{f_2(0)}{2!}x(x-1) +$$

$$\frac{f_3(0)}{3!}x(x-1)(x-2) + \cdots\cdots$$

$$+ \frac{f_n(0)}{n!}x(x-1)(x-2)\cdots\cdots(x-n+1)$$

武田さんは、2次式と3次式に限定し、公式とすることで、簡単に数列の一般項を求めることができることを、示したかったのだと思っています。

変形したパスカル三角数で簡単に$N$、$N^2$、$N^3$……の階差0項数列を求めることにであえたのは、M乗数の数列の和を求めるをテーマにしていたからだと思っています。またこれは、階差数列（差分）、三角数・台形数（和分）を考える上で、役に立つものだと12年後の今、考えています。和算、中国数学に先行する研究があったのではないかと思うのですが、まだであっていません。

話は変わりますが、森本　光生さんの書かれた「関孝和の数学のルーツ」を読んでいたら、「小数と分数」のところで、「三分の一、三分の一をそれぞれ小数に直し、小数を足して、最後に小数を分数に変換するという計算の方が、ずっと具体的で分かりやすいと江戸時代には考えられていた。」と書かれてあるのを

みつけおどろいています。

１２月になり、仕事もいそがしくなってきました。あっというまに今年も終わりそうです。書けるうちにと思い、最近思っていることを文章化してみました。「幻の０番法」について、思いちがいがあったら、おゆるしください。

お体に気をつけてください。

坪井さんと竹下さんのレポートを読ませていただきました。ありがとうございます。