

武田 利一 様

2013. 1. 13

林 邦英

本年もよろしくお願ひします。

今回のレポートを書くにあたり、「不思議な
数 e の物語（岩波書店）」のP.92とP.106
を参考にしました。ありがとうございます。

P.6とP.8の素数を利用する要素分析法の
部分をつけ加えることができました。

平方根 $\sqrt{25+a}$ の表の観察

平方根を小数を使って観察すると、分数を使った場合とは異なる性質を知ることができます。

なぜ $25+a$ なのかの理由は、 $25=5^2$ と $5 \times 2=10$ となるからです。十進法を利用する係数分解法を使うことができます。 $\sqrt{A^2+a} \approx A + a/2A$ は古くから知られています。もっともこの式を知らなくても、平方根の表「 \sqrt{N} (Nは1から100)」を実際に作った人ならば気がついていただきたいと思います。

$\sqrt{25+a}$ の表

| | |
|---------------|---------------|
| $26 = 25 + 1$ | 5.09901951359 |
| $27 = 25 + 2$ | 5.19615242270 |
| $28 = 25 + 3$ | 5.29150262212 |

(12桁の電卓を使いました。)



| |
|---|
| $\sqrt{26} = 5 + 0.1 - 0.001 + 0.00002 -$ |
| $\sqrt{27} = 5 + 0.2 - 0.004 + 0.00016 -$ |
| $\sqrt{28} = 5 + 0.3 - 0.009 + 0.00054 -$ |
| 実際に計算すると |
| $5.099^2 = 25.999801$ |
| $5.09902^2 = 26.0000049604$ |
| $5.196^2 = 26.998416$ |
| $5.19616^2 = 27.0000787456$ |
| $5.291^2 = 27.994681$ |
| $5.29154^2 = 28.0003955716$ |

| | | |
|-----------------|---------|---------------------|
| $\sqrt{26}$ の場合 | 0.00002 | $2 = 2 \times 1^3$ |
| $\sqrt{27}$ の場合 | 0.00016 | $16 = 2 \times 2^3$ |
| $\sqrt{28}$ の場合 | 0.00054 | $54 = 2 \times 3^3$ |

このように考えることができます。

$\sqrt{25+a}$ の表

| | |
|---------------|---------------|
| $26 = 25 + 1$ | 5.09901951359 |
| $27 = 25 + 2$ | 5.19615242270 |
| $28 = 25 + 3$ | 5.29150262212 |

ここに着目します。

$$9 = 10 - 1 \quad -1 = -1^2$$

$$6 = 10 - 4 \quad -4 = -2^2$$

$$1 = 10 - 9 \quad -9 = -3^2$$

$$\sqrt{26} = 5 + 0.1 - 0.001 +$$

$$\sqrt{27} = 5 + 0.2 - 0.004 +$$

$$\sqrt{28} = 5 + 0.3 - 0.009 +$$

□ を予想します。

26 の場合の $[0195]$ を使って

0.00002 とします。

$\sqrt{25+a}$ として整理します。

$$\sqrt{25+a} = 5 + 0.1a - 0.001a^2 + 0.00002a^3 -$$

$\sqrt{26}$ の数値 $[95|13|59]$ を使います。

$$\sqrt{25+a} = 5 + 0.1a - 0.001a^2 + 0.00002a^3 -$$

$$- 0.0000005a^4 + 0.000000014a^5 -$$

$\sqrt{28} = \sqrt{25+3}$ の場合を確かめてみます。

$$\sqrt{28} = 5 + 0.1 \times 3 - 0.001 \times 3^2 + 0.00002 \times 3^3 -$$

$$- 0.0000005 \times 3^4 + 0.000000014 \times 3^5 -$$

$$= 5 + 0.3 - 0.009 + 0.00054$$

$$- 0.0000405 + 0.000003402 -$$

$$\approx 5.291502902$$

2乗すると

$$28.0000029618$$

$\sqrt{5^2+a}$ として整理します。

$$\begin{aligned} \sqrt{5^2+a} &= 5 + \frac{a}{10} - \frac{a^2}{10^3} + \frac{2a^3}{10^5} \\ &\quad - \frac{5a^4}{10^7} + \frac{14a^5}{10^9} - \\ &= 5 + \frac{a}{2 \cdot 5} - \frac{a^2}{2^3 \cdot 5^3} + \frac{2a^3}{2^5 \cdot 5^5} \\ &\quad - \frac{5a^4}{2^7 \cdot 5^7} + \frac{14a^5}{2^9 \cdot 5^9} - \end{aligned}$$

$\sqrt{5^2+a}$ を $\sqrt{1+a}$ に変えます。

$$\begin{aligned} \sqrt{1+a} &= 1 + \frac{a}{2} - \frac{a^2}{2^3} + \frac{2a^3}{2^5} \\ &\quad - \frac{5a^4}{2^7} + \frac{14a^5}{2^9} - \\ &= 1 + \frac{a}{2} - \frac{a^2}{8} + \frac{a^3}{16} \\ &\quad - \frac{5a^4}{128} + \frac{7a^5}{256} - \end{aligned}$$

$\sqrt{1+a}$ の a を 0.25 として確かめてみます。

$$\begin{aligned} \sqrt{1.25} &= 1 + \frac{0.25}{2} - \frac{0.25^2}{8} + \frac{0.25^3}{16} \\ &\quad - \frac{5 \times 0.25^4}{128} + \frac{7 \times 0.25^5}{256} - \\ &\approx 1.11803817749 \\ &\text{2乗すると} \\ &\quad 1.25000936632 \end{aligned}$$

係数を取りだします。

$$1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{8}, \frac{1}{16}, -\frac{5}{128}, \frac{7}{256}$$

素数 5, 7 に着目します。

素数を利用する素因数分解法を使います。

$$\begin{aligned} 1 \\ \frac{1}{2} &= \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{8} &= -\frac{1}{2 \times 4} \\ \frac{1}{16} &= \frac{1}{2 \times 4 \times 2} \\ -\frac{5}{128} &= -\frac{5}{2 \times 4 \times 2 \times 8} \\ \frac{7}{256} &= \frac{7}{2 \times 4 \times 2 \times 8 \times 2} = \frac{5 \times 7}{2 \times 4 \times 2 \times 8 \times 10} \\ &= \frac{3 \times 5 \times 7}{2 \times 4 \times 6 \times 8 \times 10} \end{aligned}$$

$2 \times 4 \times 2 \times 8 \times 2$
 $\downarrow \quad \downarrow$
 $(\times 3) \quad (\times 5)$
 $\downarrow \quad \downarrow$
 $6 \quad 10$

$$\begin{aligned} 1 \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2 \cdot 4} &= -\frac{1}{8} \\ \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6} &= \frac{1}{16} \\ -\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} &= -\frac{5}{128} \\ \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10} &= \frac{7}{256} \\ -\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10 \cdot 12} &= -\frac{21}{1024} \\ \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10 \cdot 12 \cdot 14} &= \frac{33}{2048} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sqrt{1+a} &= 1 + \frac{1}{2}a - \frac{1}{8}a^2 + \frac{1}{16}a^3 - \frac{5}{128}a^4 \\ &\quad + \frac{7}{256}a^5 - \frac{21}{1024}a^6 + \frac{33}{2048}a^7 - \end{aligned}$$