dxとdyを自立させよう

飯島光治
（埼玉、岩槻高校）

はじめに

現在、高校の教科書では、導関数の記号 $\frac{dy}{dx}$ は、これで1つの記号で分数のように、dxとdyは分けられないとしています。そして結果として分けてよいと説明します。

以下の内容で、自立させてよい（分けてよい）とすると

(1) 理論が透明になり、応用（物理、経済等への）上のギャップがなくなる。
高校数学では
。合成関数の微分法、逆関数の微分法の証明がスッキリする。
置換積分法の公式がすぐでる。
微分方程式*の変数分離形で堂々とdxとdyを分けてよい。
がある。 *現在は扱っていませんが。

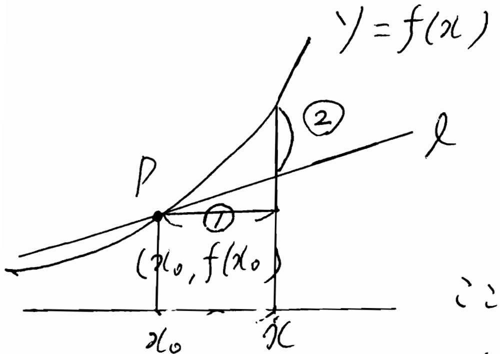
(2) 内容的に本質になりますが
以下の最良近似1次関数が、多変数

の接平面につながる。

1 最良(局所)近似1次関数について

今 $y=f(x)$ のグラフを考え，$f(x)$ 上の1点 $(x_0, f(x_0))$ において，$y=f(x)$ のグラフに最も近い1次関数は を考える。

いいかえると 1点において $y=f(x)$ とおきかえてよい直線の式は？となります。



左図で ℓ の式を

$$y-f(x_0)=m(x-x_0)$$

$$\to y=m(x-x_0)+f(x_0)$$

とおく。

ここで 最も近い直線というのを

$\underbrace{(x-x_0)}_{①}$ と $\underbrace{[f(x)-\{m(x-x_0)+f(x_0)\}]}_{②}$

を比べて $x\to x_0$ のとき

①より②がより早く小さくなる。

ととらえます。すなわち

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-\{m(x-x_0)+f(x_0)\}}{x-x_0}=0$$

とかけます。

この式を変形すると $\displaystyle\lim_{x\to x_0}\left(\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}-m\right)=0$

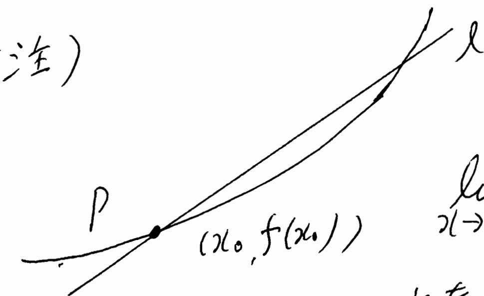
即ち $\displaystyle\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = m \quad \therefore m = f'(x_0)$

となり、$l: y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$

で $P(x_0, f(x_0))$ における接線の方程式

になります。

(注)



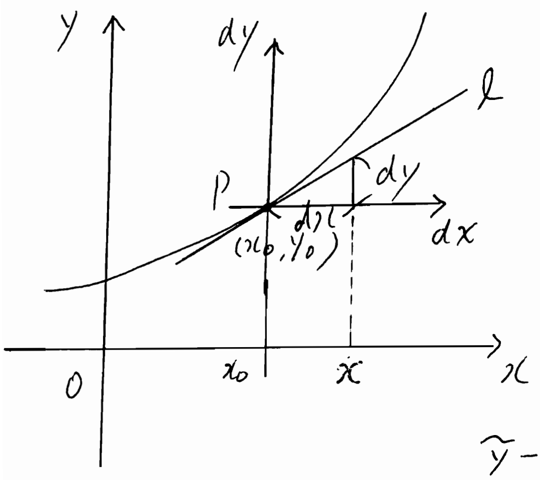
l が左図のときは

$$\lim_{x \to x_0} \frac{[m(x-x_0)+f(x_0)]-f(x)}{x-x_0} = 0$$

となりますが、同様にして

l は 上と 同じ式になります。

$\boxed{2}$ dx と dy の導入



左図で 点Pを仮の原点とする座標(局所座標という)をとり、横軸を dx、たて軸を dy とかく。

そして局所座標での増分(x_0からの) $x-x_0$、それに対する$\tilde{y}$の増分 $\tilde{y}-y_0$ をそれぞれ dx, dy とかき xの微分、yの微分という。

(注) $\tilde{y}$ は はじめの(もと)座標のyと区別するために。

すると ℓ の式は

$$\tilde{y}-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0) \text{ より}$$

$dy=f'(x_0)\,dx$ とかける。

ここで x_0 を $y=f(x)$ 上の各点にとることにすると

$x_0 \to x$ として $\underline{\underline{dy=f'(x)\,dx}}$ とかける。

(注) 上の定義により、一般には dx, dy は微小ではなく、「ふつう」の値となる。

なお $\int_a^b f(x)\,dx$ の dx は $\Delta x \to 0$ のときの Δx より微小となる。

$\boxed{3}$ dx と dy の自立の利用例

(例1) 合成関数の微分法の証明

今 $y=f(u)$, $u=g(x)$ のとき

合成関数 $y=f(g(x))$ の $\dfrac{dy}{dx}$ は?

証) $y=f(u)$ より $dy=f'(u)du$ ①

$u=g(x)$ より $du=g'(x)dx$ ②

② を ① に代入して

$$dy=f'(u)\cdot g'(x)\,dx$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=f'(u)\cdot g'(x)=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx} \; //$$

（例2） 逆関数の微分法の証明

$y=f(x)$ の 逆関数を $x=g(y)$

とするとき $\dfrac{dx}{dy}$ は？

証） $y=f(x)$ より $dy=f'(x)dx$ ①

$x=g(y)$ より $dx=g'(y)dy$ ②

②を①に代入して $dy=f'(x)\cdot g'(y)dy$

$dy\neq 0$ として $f'(x)g'(y)=1$

$f'(x)\neq 0$ として $\therefore\ g'(y)=\dfrac{1}{f'(x)}=\dfrac{1}{\frac{dy}{dx}}$ （①より）

$$\therefore\ \frac{dx}{dy}=\frac{1}{\frac{dy}{dx}}$$

〃

〈コメント〉 私が授業で使用した啓林館（1999版）の教科書では，逆関数の微分法の所では合成関数の微分法を用いていて，証明が一貫していません。（合成関数の微分法との）

(例3)　置換積分法の公式：

$y=f(x)$ で，$x=g(t)$ とおくと

$$\int f(x)\,dx=\int f(g(t))\,g'(t)\,dt$$

証）　$x=g(t)$ より　$dx=g'(t)\,dt$

$$\therefore \int f(x)\,dx=\int f(g(t))\,g'(t)\,dt \quad //$$

＜コメント＞　特にこの公式において自立の良さがでます。前記教科書では「わかりにくい」説明がしてありました。

(例4)　変数分離形

$\dfrac{dy}{dx}=2xy$　を解け。

与式より　$\dfrac{1}{y}\,dy=2x\,dx$　①

$$\therefore \int \frac{1}{y}\,dy=\int 2x\,dx$$

以下略

＜コメント＞　自立できないとすると①で良い理由として，例3の置換積分法の公式を用いて，説明することになります。そして説明できるので，以後①のようにしてよいという説明になります。

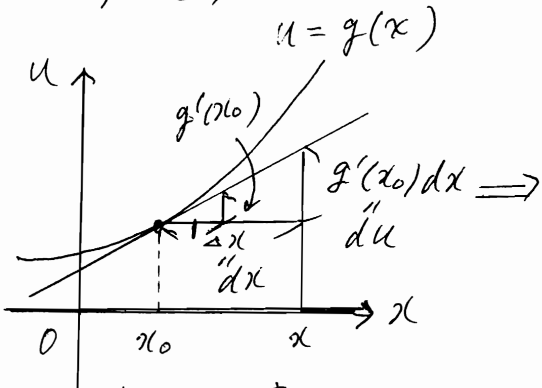
$\boxed{4}$ $\boxed{3}$の例1，例2の図示について

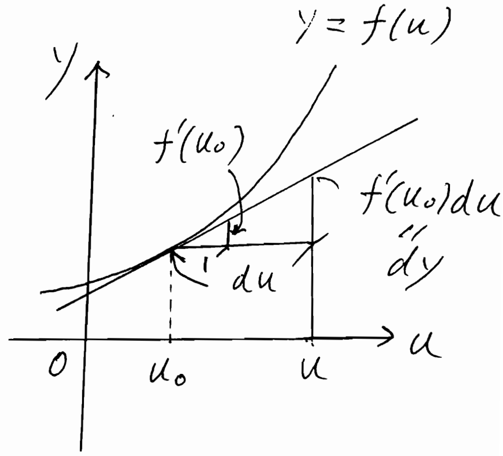
$\boxed{3}$の例1，例2の証明（dxとdyを自立した）も，形式的では に対して図示して確認します。

(1) $\boxed{3}$の例1について

$y=f(u)$，$u=g(x)$

今 xがΔx増分したとき uがΔu増分し，Δuの増分に対して yがΔy増分するとすると，

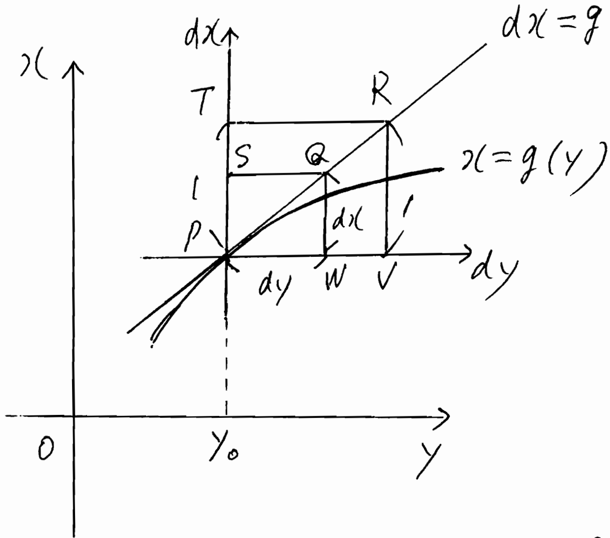




(注) このとき
$\Delta x = x - x_0$で
局所座標をとると
$\Delta x = dx$で
$\Delta u \fallingdotseq du$

(注) 上図で
$1 : g'(x_0) = dx : \square$
より $\square = g'(x_0)dx$

(2) $\boxed{3}$ の例2 について



左図で PT=1 にとると

△PSQ ∽ △PTR より

$dx : 1 = dy : TR$

$\underset{(PS)}{\shortparallel}$ 　 $\underset{(SQ)}{\shortparallel}$

$\rightarrow dy = TR \cdot dx$

$\rightarrow TR = \dfrac{dy}{dx}$

$TR = PV$ より $PV = \dfrac{dy}{dx}$

より 接線PRの傾き①

$= \dfrac{RV}{PV} = \dfrac{1}{\frac{dy}{dx}}$ 」

一方 ①の傾きは $\dfrac{dx}{dy}$

$\therefore \dfrac{dx}{dy} = \dfrac{1}{\frac{dy}{dx}}$ //

<参考文献>

1 「微積分教育の新しい方向*」(宮本敏雄 東数協ゼミナール1 1988刊)

*の初出は「数学教室」(1963.5〜1964.3)(国土社)

2 「微分と積分」(松田信行,宮本敏雄)(講談社 1984刊)

3 「実例経済数学」(山田欽一,宮本敏雄 現代数学社 1985刊)

* 3で全243頁のうち 宮本先生は P99〜P243 の数学の内容を,執筆しています。