無限小の概念と接線について

飯島光治（埼玉）

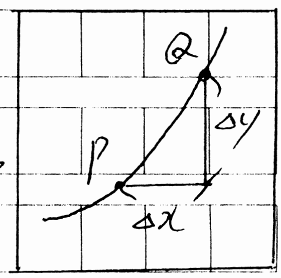
はじめに

数教協全国大会（2007年8月3日から5日。長野）の和田博先生の講座、伊藤潤一先生の分科会レポート、小島順先生の発言を聞いて、タイトルのテーマについて、今までより明確になってきました。

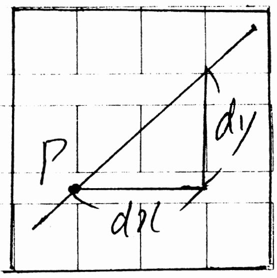
1　無限小の概念について

$\Delta x \to 0$ のときの Δx を、無限小という訳ですが、Δx は0ではないが、限りなく0に近づく変量とは、どういうことか、私には今まで、はっきりしませんでした。無限小概念の歴史を調べたこと（注1）もありますが、スッキリしません。

図1で、$\Delta x \to 0$ とすると $\frac{\Delta y}{\Delta x} \to \frac{0}{0}$ となり、よくわからなくなります。そこで点Pの付近を、10倍、100倍……∞倍に拡大してい



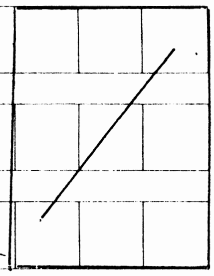
<図1>



<図2>

くと、点P付近の曲線は、点Pを通る直線と見分けがつかなくなります。∞倍の時のΔxをdx、Δyをdyとすると、この時のdxとdyは無限小ではなく、「ふつう」の大きさで良い。即ち無限小の状態を、∞倍に拡大していくことに、いいかえるとわかり易くなります。

伊藤先生の場合は、$y=x\sin\frac{1}{x}$ の$x=0$付近を、コンピューターのソフトを用いて拡大すると、右図のようになり、生徒は、「オー」というそうです。



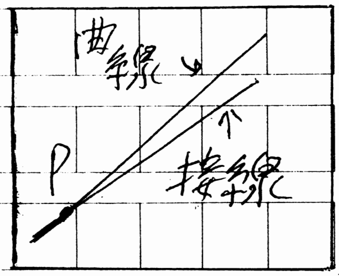
<図3>

和田先生の場合は、拡大図を方眼を用いて示しています。

2　接線について

曲線上の点Pの付近を、∞倍した時の点Pを通る直線（←曲線がそう見える）を、接線というとすると、曲線と直線の共存点は、無数にあることになり、曲線上の点P

のみを共有点とするという定義と矛盾することになります。それに対し伊藤先生は、点P付近の曲線上の点Q付近も拡大すると曲線と接線は、平行になっていく？　といわれましたが、点Pを共有する平行線は無いので、拡大していくと、右図のようになっていくと良いのですが、図4になったとしてもdxに対してdyは、曲線上の点でした。

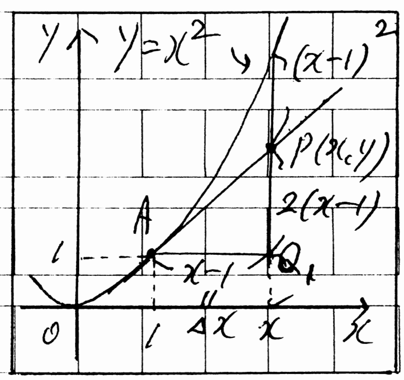


＜図4＞

　ところで和田先生は、例えば$y=x^2$上の点$(1,1)$における接線の式を

$$y = x^2 = \{\underbrace{(x-1)}_{\Delta x}+1\}^2$$
$$= (x-1)^2 + 2(x-1) + 1$$

　ここで$(x-1)\to 0$にすると$(x-1)^2$は$(x-1)\to 0$に対しずっと早く0に収束するので、

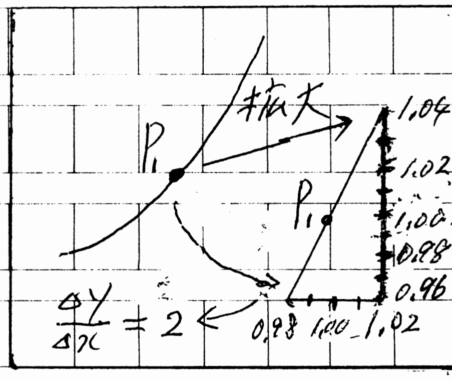


＜図5＞

　接線の式は、$y=2(x-1)+1=2x-1$ //

　以上の解で　(1)接線を、点Aを通り、傾き$\dfrac{dy}{dx}$の直線と定義する。(2)この時、

$PQ=2(x-1)$ 即ち $dx=x-1$ に対して、$dy=2dx$ になるのは、それまでに、$y=x^2$ 上の具体的な点に対して、拡大図で示している。図6参照。(3)この時、曲線と接線との差が、$(x-1)^2$ という式で示している。（式の威力！）



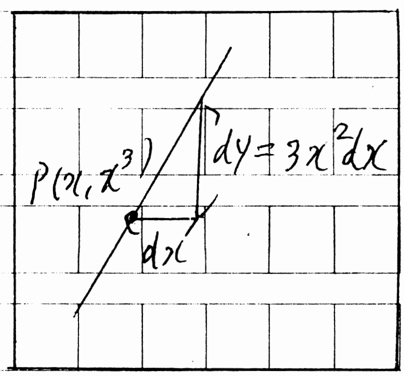
＜図6＞

同様に $y=x^3$ 上の点 $(1,1)$ における接線の式の時は、曲線と接線の差の式が、$(x-1)^3+3(x-1)^2$ となる。

接線の式は、$y=3(x-1)+1 \to y=3x-2$

この時、図7で $x=1$ の時従って $dx=x-1$、$dy=3(x-1)$ の時。

また $\frac{dy}{dx}=3x^2$ となるのは、$y=x^3$ 上の具体的な点について、$\frac{\Delta y}{\Delta x}$ を計算して、予想しています。（注2）



＜図7＞

（注1）

「曖昧だと言われるライプニッツの無限小概念」（石黒ひで

馬場郁訳「現代思想」1988.10月号）

ここでは ライプニッツの無限小に関する著述をもとに検討されていますが、結局 dx は $\neq 0$ か $= 0$ なのか私にはハッキリしません。

オイラーは $dx = 0$ とした。「無限小量というのは、指定されたあらゆる量よりも小さい量。もしその量が0に等しくないとするなら、それに等しい量を指定することが可能になることになるが、これは仮定に反するのである。」といっている。

（「dx と dy の解析学」（高瀬正仁　日本評論社　2000年刊　58頁。）

（注2）

「接線問題」というのは1つのテーマでその歴史がある訳ですが、それを調べましたが、割線の極限としての接線は近代的とらえ方で、曲線上の1点を拡大した局所正比例の直線を接線とし、その式の求め方は、和田先生の解法が、現代的とらえ方ではないかと、現在私は思っています。

（2007.8.8　記）