「放物線と直線で囲まれた面積を求める。— アルキメデスの時代において —」について

飯島孝治(埼玉)

＜はじめに＞ アルキメデス(B.C 287?〜B.C. 212)の時代に この問題を、どのようにやったのか。

図形の問題は、図形の性質を用いて — 接線の方程式等を用いないで — やったらという内容です。 放物線の性質を用いるのですが、その性質の成立の証明は、手元にある本を参照しましたが、できるだけ私が納得する形で、補足しました。

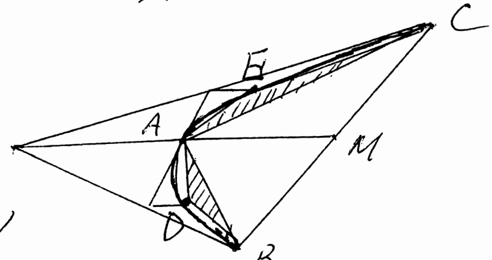
以下は 放物線のみに通用するものですが とても 私には考えられません。

(注) 以下は、アルキメデス自身のものではありません。

$\boxed{0}$ はじめに

武藤徹著作集(全5巻 合同出版 2007.8月刊)

の第4巻 面積の発見 117頁に



右図で

'$\triangle ADB = \frac{1}{4}\triangle ABM$ ①

$\triangle AEC = \frac{1}{4}\triangle ACM$ ② より

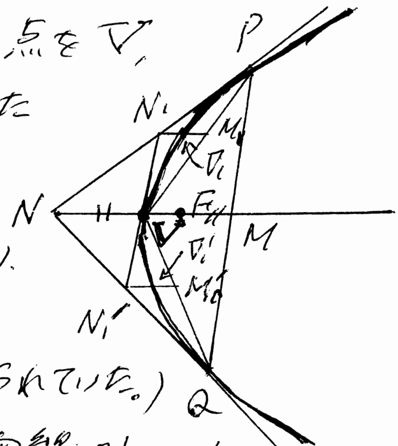
図の斜線部分の面積は $\frac{1}{4}\triangle ABC$ です。'

と あり ①, ②は ナゼ? と思いました。

(②がいえると、①もいえます。)

以下 述べるように これを示すには 順序よく きちんというのは、仲々大変とわかりました。

$\boxed{1}$ この点について「話題源数学」(上)
(東京法令出版 1989初版 1990版)をみると
(416頁)



右図は、弦PQの中点Mと放物線の焦点Fを通る直線が、放物線と交わる点をV、2点P, Qにおいて放物線に引いた接線の交点をNとすると
3点M, V, Nが一直線上にあり、*
かつ $\underline{VN=VM}$ がいえる。
(アルキメデスの時代に既に知られていた。)

(* いいかえると、P, Qは放物線外のN(上の条件をみたす)から引いた接点で、NとVを直線で結び、さらにPQとの交点をMとすると、MはPQの中点で、PM=MQがいえることが、このレポートの6頁で示されます。)

この時 $\triangle NPQ = 2\triangle VPQ$ $\left(\because \begin{array}{l}\triangle NPM = 2\triangle VPM, \\ \triangle NQM = 2\triangle VQM\end{array}\right)$

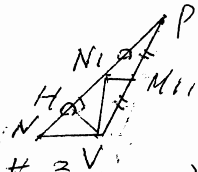
さらに、同じ関係が* $\triangle V_1VP$、$\triangle V_1'QV$においても成り立つ。

後この(同型)に用い。

よって $\triangle N_1VP = 2\underbrace{\triangle V_1VP}_{①}$, $\triangle N_1'QV = 2\triangle V_1'QV$
が成り立つ。

ところが $\triangle N_1VP = \frac{1}{2}\triangle PNV^{*} = \frac{1}{2}\triangle PVM$ ㋺
$\triangle N_1'QV = \frac{1}{2}\triangle VNQ = \frac{1}{2}\triangle VQM$ だから

(* P, N, Q, M と P, N_1, V, M_1 とは同じ関係より M_1はPVの中点。よって $PN_1 = N_1N$。右図で$\triangle N_1VP$と$\triangle PNV$は高さHV共通より)



$\triangle V_1VP = \frac{1}{4}\triangle PVM$， $\triangle V_1QV = \frac{1}{4}\triangle VQM$ より

（2頁の ①, ② より） レポート1頁の ③, ④ がいえる。

（以上 佐藤恒雄先生による。）

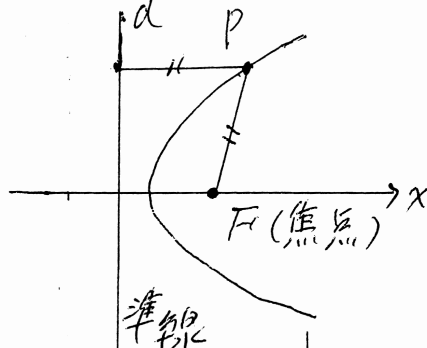
ここで レポートP2の根拠の $NV = VM$ は なぜについて，以下の内容となります。

$\boxed{2}$ 以下は「幾何学大辞典」1 平面
岩田至康編 槙書店 （1971 刊）によります。

$NV = VM$ をいうには 補助定理1〜3を いってからに なります。

＜補助定理1＞「放物線上の1点Pにおける接線が準線 d に交わる点を Q とすれば $PF \perp FQ$」

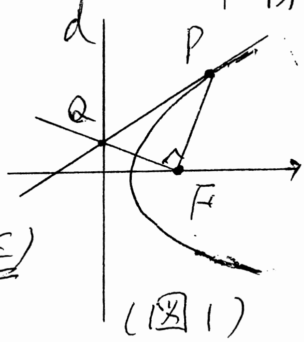
証）の前に 放物線の定義；「平面上である直線 d とある点 F からの距離が等しい点Pの軌跡」



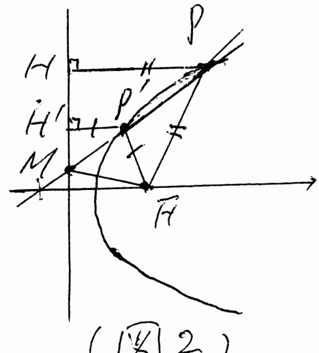
証）放物線上の2点 P, P' と 準線 d に下した垂線の足を H, H' とする。（図2）
PP' と d との交点を M とすれば

$$\frac{MP}{MP'} = \frac{HP}{H'P'} = \frac{PF}{P'F}$$

よって FM は $\angle PFP'$ の外角を 2等分する。（注）

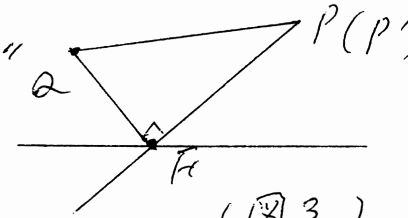


（図1）



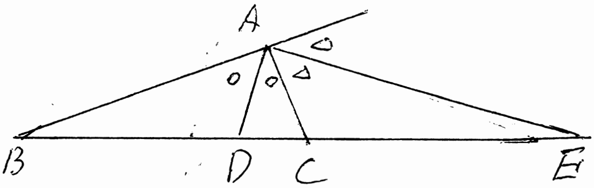
（図2）

ここで $P' \to P$ とすると $\angle PFP' \to 0°$ （図3）
より $\angle PFP'$ の外角は、$180°$。この時
$M \to Q$ として　$FQ \perp PF$。

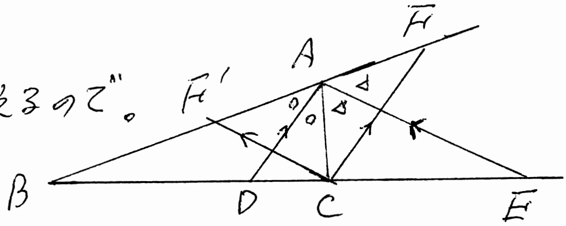


（図3）

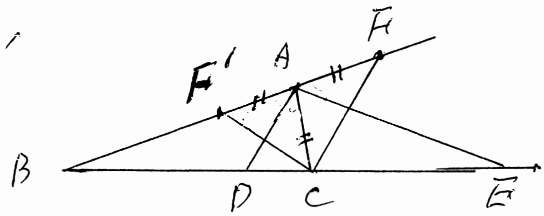
（注）
「△ABCの頂角（またはその外角）の2等分線 ⇒
$AB : AC = BD : DC$
$= BE : EC$
が成りたつ。この逆もいえる。」



1) ⇒ の証明の方針
Cから AD, AE に平行に CF, CF' を引く。
この時 $AC = AF$,
$AC = AF'$ がいえるので。



2) ⇐ の証明
BAの延長上に AC に等しく AF を、
また AからBにむかい AC に等しく AF' をとる。
するとこの時 * $AD \parallel FC$,
$AE \parallel F'C$ より。
＊条件より



<補助定理2>「放物線上の1点Pにおける接線は、
PF及び Pを通り軸に平行な直線との
なす角を　2等分する。」

証）右図で$\alpha=\beta$をいう。

$\triangle PHQ$と$\triangle PFQ$において

$\angle PHQ=\angle PFQ=90^\circ$

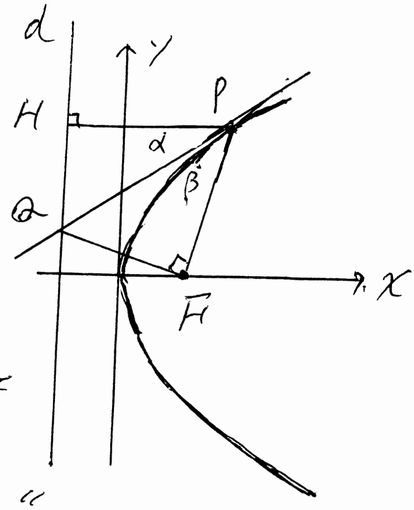
（補助定理より）

また $PF=PH$（放物線の定義）

より $\triangle PHQ\equiv\triangle PFQ$

（直角三角形での斜辺と一辺による）

$\therefore\ \alpha=\beta$ 〃



＜補助定理３＞「放物線外の１点Pから接線PA，PBを引けば，PFは$\angle AFB$を２等分する。」

証）右図で

H，KはFのPA，PBの対称点（∵補助定理２より）より，右図で

$\alpha=\beta$，$\gamma=\delta$

次に $\underline{PH=PF=PK}$* より

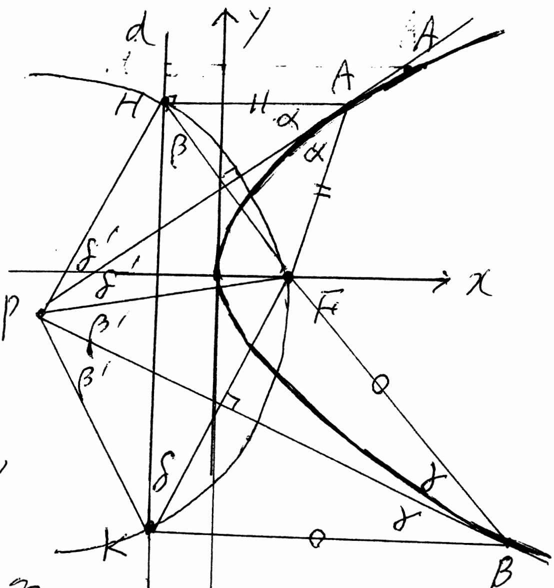
Pは$\triangle FHK$の外心より

$\beta=\beta'$，$\delta=\delta'$（∵中心角と円周角との関係より）

$\therefore\ \triangle FAP\sim\triangle FPB\ \rightarrow\ \therefore\ \angle AFP=\angle BFP$

よっていえた。

（* AP，BPはFH，FKの垂直２等分線より）



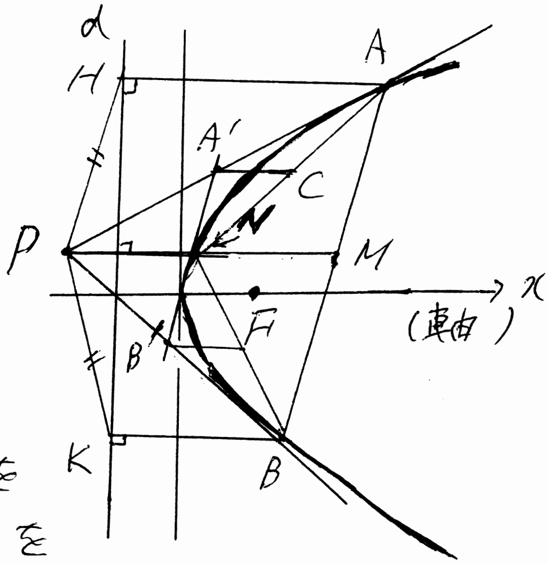
＜本定理＞「放物線外の1点Pから接線PA, PBを引けば、Pを通り軸に平行な直線はABをMで2等分し、PMと放物線との交点Nは、PMの中点である。」

証）補助定理3の証明より$\underbrace{\ }_{\text{右図で}}$ $PH=PK$より

PMは、HKを垂直に2等分する。

$AH \parallel MP \parallel BK$より

MはABの中点。



次に右図のNで接線を引いて、PA, PBとの交点をA', B'とし、A'から軸に平行に引いてANとの交点をCとすれば、先のP, A, B, Mと同じ関係より（$P \to A'$, $A \to A$, $B \to N$, また$P \to B'$, $A \to N$, $B \to B$）$A'C = CN \to \therefore AA' = A'P$ （$\because A'C \parallel PM$）

同様にして　$BB' = B'P$より

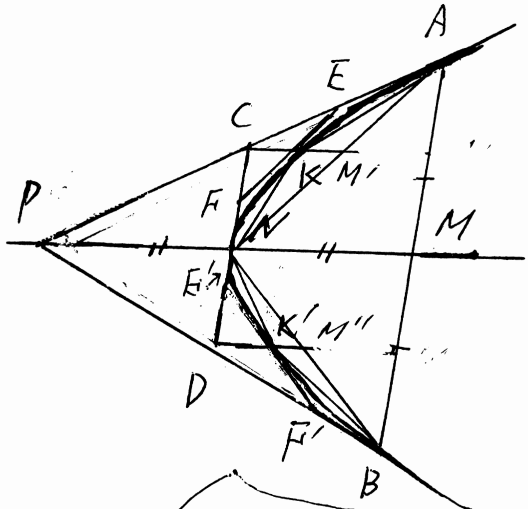
$A'B' \parallel AB$　$\therefore PN : NM = 1:1$　$\therefore PN = MN$

$\boxed{3}$　この後の展開について－放物線と直線で囲まれた部分の面積$S = \frac{4}{3}\triangle ABC$（レポート1頁の図）をいう。—

(1) 「幾何学大辞典」より

(方法1)

右図で



$\triangle PCD = \frac{1}{2}\triangle NAB^{*}$ (1)

$\triangle CEF = \frac{1}{2}\triangle KAN^{**}$ (2)

$\triangle DE'F' = \frac{1}{2}\triangle K'BN$

- - - - - - - - -

この両辺を足すと

図形$PANB = \frac{1}{2}$弓形ANB (3)

すると

$\triangle PAB =$ 図形$PANB +$ 弓形ANB

$\downarrow$(3)より

$= \frac{1}{2}$弓形$ANB +$ 弓形ANB

$= \frac{3}{2}$弓形ANB (4)

$\therefore \triangle PAB = 2\triangle NAB^{***}$

$= \frac{3}{2}$弓形ANB ((4)より)

*** $\triangle PAM = 2\triangle ANM$
$\triangle PBM = 2\triangle BNM$ より

$\rightarrow \therefore$ 弓形$ANB = \frac{4}{3}\triangle NAB$

*∵) P, A, M, B と C, E, N, M' の関係が同じより $AM' = M'N$

$\therefore \triangle PCN = \frac{1}{2}\triangle NAM$ ①

同様して (∵ $\triangle PCN = \triangle ACM'$ より)

$\triangle PDN = \frac{1}{2} NBM$ ②

①+③ より

** (2)は(1)と同じ関係より

(方法2)

$\triangle NAB = S$, $\triangle KAN + \triangle K'BN = S_1$ とおく。求める面積Aとおくと、 $S + S_1 < A < S + S_1 + S_1$

ここで $S_1 = \frac{1}{4}S$ より $S + \frac{1}{4}S < A < S + \frac{1}{4}S + \frac{1}{4}S$

これをくり返すと

$$\left(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+\cdots+\frac{1}{4^n}\right)S < A < \left(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+\cdots+\frac{1}{4^n}\right)S + \frac{1}{4^n}S$$

等比数列の和の公式より

$$\frac{4}{3}\left\{1-\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}\right\}S < A < \frac{4}{3}\left\{1-\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}\right\}S + \frac{1}{4^n}S$$

各項に $+\left(-\frac{4}{3}S\right)$

$$-\frac{1}{3}\cdot\frac{S}{4^n} < A-\frac{4}{3}S < \frac{2}{3}\cdot\frac{S}{4^n}$$

ここで n を限りなく増すと $0 < A-\frac{4}{3}S < 0$ より

$$A = \frac{4}{3}S \,_{//}$$

(2) 「話題源数学」(上) より

このレポート1頁の図で $\triangle ABC = S$, 斜線部分の面積を S_1 とすると $S_1 = \frac{1}{4}S$

同様にして $S_2 = \frac{1}{4}S_1 = \frac{1}{4^2}S$

$$\therefore S+S_1+S_2 < A$$

この操作を続けると

$$S+S_1+S_2+\cdots+S_n < A$$

$$\therefore S\left(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+\cdots+\frac{1}{4^n}\right) < A$$

等比数列の和の公式より

$$\to \frac{4}{3}\left(1-\frac{1}{4^{n+1}}\right)S < A \cdots ①$$

i) ここでもし $A > \frac{4}{3}S$ と仮定すると

A から上の方法で三角形の面積を十分多くしぼり出すことができるから

$$A-\frac{4}{3}\left(1-\frac{1}{4^{n+1}}\right)S < A-\frac{4}{3}S$$ が成りたつ。

これから

$$A-\frac{4}{3}S+\frac{1}{4^n}\cdot\frac{1}{3}S < A-\frac{4}{3}S$$ となり

矛盾がおこる。

次に　2) もし $A < \frac{4}{3}S$ とすると

$\left(\frac{4}{3}S - A\right)$ を何倍かすれば $\frac{S}{3}$ より大きくすることができる。（アルキメデスの公理）

n 倍のときとすると

$$n\left(\frac{4}{3}S - A\right) > \frac{S}{3}$$

ここで $4^n > n$ より $4^n\left(\frac{4}{3}S - A\right) > \frac{S}{3}$

$$\rightarrow \frac{4}{3}S - A > \frac{1}{4^n}\cdot\frac{S}{3}$$

$$\rightarrow \frac{4}{3}\left(1 - \frac{1}{4^{n+1}}\right)S > A$$ となり

このレポート P8 の ① と矛盾する。

1) 2) より　$A = \frac{4}{3}S$ //

(3) 上記 武藤先生の本では

求める面積を S と表すと $\triangle ABC < S < 2\triangle ABC$

このレポート 1 頁の斜線部分の面積は $\frac{1}{4}\triangle ABC$。

AD, BD, AE, CE の切り取る面積についても同じことがいえますから $\triangle ABC$ の面積を A と表すと　$A < S < 2A$,

$$A + \frac{A}{4} < S < A + 2\times\frac{A}{4},$$

$$A + \frac{A}{4} + \frac{A}{16} < S < A + \frac{A}{4} + 2\times\frac{A}{16}$$

$$A + \frac{A}{4} + \frac{A}{16} + \frac{A}{64} < S < A + \frac{A}{4} + \frac{A}{16} + 2\times\frac{A}{64}$$

- - - - - - - - - - -

次に アルキメデスは 次のように行なっています。

$\frac{A}{4} = B$, $\frac{A}{16} = C$, $\frac{A}{64} = D$, $\frac{A}{128} = E$, ...

とおくと A, B, C, Dは 公比$\frac{1}{4}$の等比数列
になっている。

そこで $A=4B \to A-B=3B$

$B=4C \to B-C=3C$

$C=4D \to C-D=3D$

$D=4E \to D-E=3E$

右の4式を足すと $A-E=3(B+C+D+E)$

両辺を3でわると

$$B+C+D+E=\frac{1}{3}(A-E)$$

$$\therefore A+B+C+D+E=\frac{4}{3}A-\frac{1}{3}E \quad ①$$

$$\to A+B+C+D+2E=\frac{4}{3}A+\frac{2}{3}E \quad ②$$

① ②より $\frac{4}{3}A-\frac{1}{3}E<S<\frac{4}{3}A+\frac{2}{3}E$

$$S-\frac{4}{3}A<\frac{2}{3}E$$

1) ここでもし Sが$\frac{4}{3}A$より少しでも大きいとすると

右辺は $\frac{2}{3}E\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}\times\cdots\cdots$

となっていくので いつかは この式は成り立たなくなる。

2) もし Sが$\frac{4}{3}A$より少しでも小さいとすると

$\frac{4}{3}A-S<\frac{1}{3}E$ となり

右辺は $\frac{1}{3}E\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}\times\cdots$と

なっていくので いつかは この式が成り立たなくなる。

1) 2)より $S=\frac{4}{3}A$ //

（補足） 武藤先生は「数学のはなし＝微分積分への道＝」
（新日本出版社　1980初刊）では

$1+\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{4^3}+\cdots\cdots$ ① をもとめるのに

① $=x$ とおき，両辺を4倍する。

$$4+(\underbrace{1+\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+\cdots\cdots}_{x})=4x$$

$$\therefore 3x=4 \rightarrow x=\frac{4}{3}$$

としています。

《おわりに》

岩田先生は，この問題は'積分の起りともみなされる重要な発見である。'

佐藤先生は '以上がアルキメデスの積尽法であるが，放物線の特性を生かした，驚くべきアルキメデスの無限性への解析である。'

武藤先生は '実に見事な論法ですね。（略）アルキメデスの考えた方法は搾(しぼ)り出し法と呼ばれています。これから区分求積法が生み出されました。'

と書かれています。以上の精密な内容（論法）を感じると共に改めて現在の積分法（一般に適用できる。←解析幾何の上に）の意義（の1つ）と威力を感じます。

（2007．9．22）