

積分で求まる量—全圧力を求める—

飯島光治(埼玉)

はじめに

2007年数教協全国大会の講座積分で、浅間士人(千葉)より物理では、全圧力を求めるのに、積分の式でとあり、式を提示された。これを聞いて数学Ⅱの積分では、この式を理解できるようにが、目標の1つに存するのではと思いました。現在数学では、面積、体積、距離(数学Ⅲ)を求めるが主ですが、それでは他分野での総量を求める積分の式が理解できなくなります。理解するには、区別求積法の考之が、もとになります。現在数学Ⅱの教科書では、これを導入されていません。

ただ圧力についての理解が、私には浅く
ようやく以下のように。関教協春の研究集会(2008.2.23)の高校分科会(参加11名)で、短時間(10分位)ですが、意見

をもらい、参考に存りました。

1 圧力の定義の扱いについて

辞書の1つによると、ある物が他の物を押す力。(物理学では、単位面積当たりの押す力をいう。)とある。

即ち深さ 1 m の 1 m^2 に押す力を単位として、 1 N/m^2 と表す。深さ $x\text{ m}$ ならば $x\text{ N/m}^2$ 。深さ x 、面積 $S\text{ m}^2$ ならば、 $x \cdot S\text{ N/m}^2$ 。

ここで N の単位は、トン重、g重等になる。

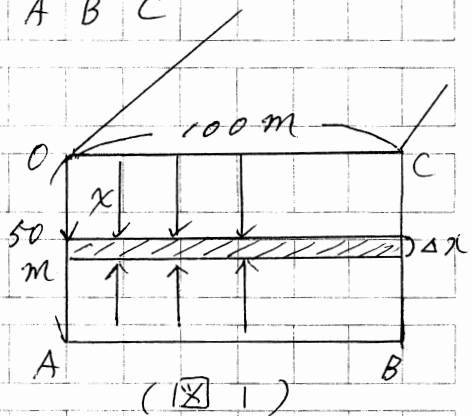
全圧力を求めるには、各要素での圧力を足す訳ですが、このままの定義だと、圧力は、1あたり量(内包量)となり、足せないと存ります。ここでこの定義をいいかえて、

深さ 1 m の 1 m^2 に押す力は、1トンあるいは 1 g重^* とすると、力を重とみることあるいは力の古の古とみること、足せることになる。なお水の比重は、1より水中では重さは、体積といいかえられる。

(* 深さ 1 cm の 1 cm^2 当たり押す力)

2 全圧力を求める問題

(例1) 高さ50m, 幅100mの鉛直な壁によって作られたダムがある。水がこのダムの壁によって及ぼす全圧力の大きさを求めよ。(注1) (右図のOABCの壁に及ぼす全圧力)



解) 図1で原点Oからの深さ x m の所に,

深さ Δx m の微小の帯をとると, この所に

に圧力の強さは, 微小部分の面積は, $100\Delta x$ (m²)

微小部分の圧力の強さは, ほぼ同じとみて

約 $x \cdot 100\Delta x$ (m²)。よって求める全圧力は,

各深さ x での Δx 部分の圧力を足すことにより

求めるので

$$P = \int_0^{50} x \cdot 100 dx = 125000 \text{ (t)}$$

なお斜線部分(図1の)は, 深さ x の所

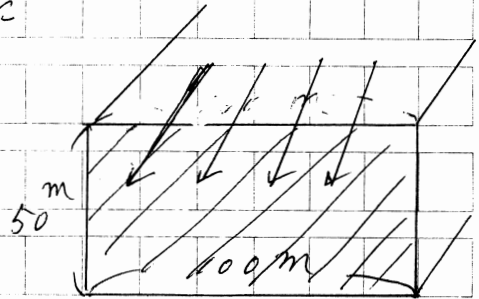
までの圧力を $P(x)$ とすると, 深さ $(x+\Delta x)$

までの圧力は, $P(x+\Delta x)$ で, $P(x+\Delta x) - P(x)$

即ち増分を表す。また $d\alpha$ は, $\Delta x \rightarrow 0$ の時

の Δx ($\Delta x \neq 0$) を表し、幅 d では、圧力の強さを、同じとみなしている。

圧力の向きについて、この時壁に垂直に表す向きをいい、水中では、対象にあらゆる方向から垂直に働くという事で、最終的には、図2の向きになる。



(図2)

(例2) 底の半径が 1.5 m, 深さ 4 m の直円柱状の容器に水が満たされている。この水が容器の側面に及ぼす全圧力を求めよ。(注3)

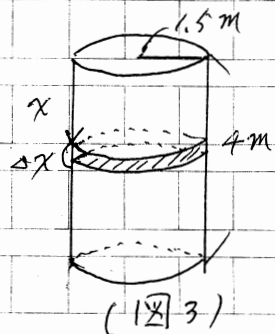
解) 右図で、幅 Δx の側面積 $3\pi \Delta x$ より

$$P = \int_0^4 x \cdot 3\pi dx$$

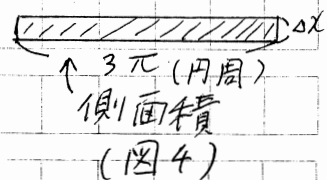
$$= 3\pi \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^4 = 24\pi \text{ (トン)}$$

* $x \cdot 3\pi dx$ の単位は

$$x \text{ (kg/m}^2) \times 3\pi \text{ (m)} \times dx \text{ (m)} = \text{トン}$$



(図3)

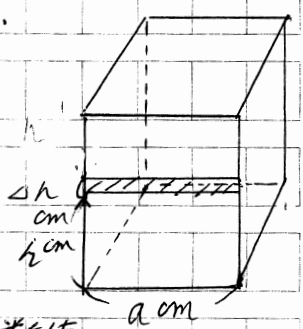


(図4)

(例3) 液面の表面から h cm の深さにおける圧力は、その液体の比重を w とすれば 1 cm^2 当り hw g である。1辺が a cm の正方形の底面の直方体の水そうを水平におき 6 cm の深さまで水を入れた時、水そうの1つの側面にかかる全圧力はいくらか。(注4)

(方針) 比重 = その物質の質量の同体積の 4°C の水の質量に対する比。水の比重を 1 として、深さ 1 cm の比重 w の 1 cm^2 当りの圧力は、 w g。深さ h cm の時は、 1 cm^2 当り hw g。この時圧力を、重さとしている。

解) $[h, h+\Delta h]$ の高さ Δh cm、幅 a cm の側面にかかる圧力は $hw a \cdot \Delta h$ g。



$$\therefore P = \int_0^6 hw a dh = 18 a w \text{ g}$$

* 単位は $hw (\text{g/cm}^2) \times a \text{ cm} dh \text{ cm}$ 。 h は h 倍の数値としてみる。(図5)

(例4) たて 4 m、横 3 m、深さ 2 m の直方体の水そうに、密度 0.8 t/m^3 のガソリンが満たしてある。この水そうの4つの側面

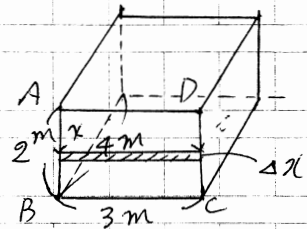
のおのおのに働く全圧力の大きさを求めよ。(注5)

(方針) 例3 と比べて, $cm \rightarrow m$, $cm^2 \rightarrow m^2$
 $w \rightarrow 0.8$, $g \rightarrow t$ の時。

解) 1) の側面 ABCD の
 の全圧力を求める。

$$P = \int_0^2 x \cdot 0.8 \cdot 3 dx$$

$$= 2.4 \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^2 = 4.8 (t)$$



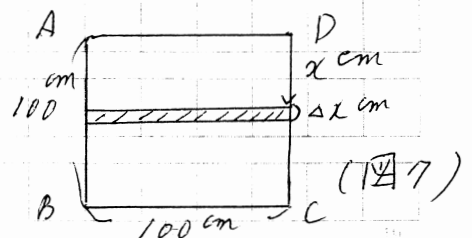
以下 略。(図6)

(例5) 浅間土んぼりの式

$$P = \int_0^{100} x \frac{g重}{cm^2} \times 100 cm \times dx cm = 500000 (g重)$$

$$= 500 (kg重)$$

(考察) 単位つきなので, 単位をみると
 $\frac{g重}{cm^2} \times cm \times cm = g重$ より, この時 $g重$ と
 いう重さとしての力を, 集めていこうと
 なる。 $x \frac{g重}{cm^2}$ は, 深さ $x cm$ での面積 $1 cm^2$
 当りの圧力を表す。



(図7)

(注1) 日本文教出版「数学Ⅳ」(1969刊) P137~P138

(注2) $P = \int_0^{50} x \cdot 100 dx$ の中身について

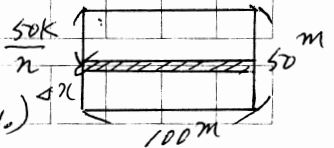
$[0, 50]$ を n 等分すると $\Delta x = \frac{50}{n}$ で、 k 番目の深さは、

$\frac{50k}{n}$ 。右図で $\frac{50k}{n}$ での圧力は、 $\frac{50k}{n} \cdot \frac{50}{n} \cdot 100$ 。

よって $P = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{50k}{n} \cdot \frac{50}{n} \cdot 100 = \int_0^{50} x \cdot 100 dx$

各 k 番目での圧力の和が

全圧力と考えられる。(* 各 k 番目
まで"の"ではない。)



ここで $k=n$ のとき 深さ $50m$ の下に 仮に Δx の幅を考
えて、圧力は $\sqrt[約]{50 \cdot 100 \Delta x}$ (深さ $50m$ での圧力) と考えられます。

(注3) 「数学解法事典」(旺文社 1969刊 P851より)

こゝには「深さ xm のところの $1m^2$ 当たりの水圧の強さは x トン」とあり、圧力の強さを重さに言いかえて
いると思います。

(注4) 「代教解法事典」(旺文社 1958刊 P666より)

(注5) (注1) の P138 の問より

(参考文献) 私の手元の本では、壁にかかる圧力(水中

での)についての記述はあまりなく、一番詳しく書いてあったの

は「無限小の総和法」(ナランソン 北原泰寿、宮本敏雄

記 東京図書 1960初刊)で、圧力の定義について、また

上記(注2)について、参考に存しました。

(2008.2.25 記)