「マクローリン展開について」

飯島光治

＜はじめに＞

テイラーの定理

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1} + R_n$$

$$\frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-a)^n$$

（cはxとaの間の数）

において $a=0$ の場合が マクローリンの定理ですが、この時 $\lim_{n\to\infty} R_n = 0$ ならば、右辺は無限級数となる。はじめ この時 右辺は 有限になるのでは？と思いましたが、$n\to\infty$ なので それはない。次に マクローリンの定理に、いずれ両辺に $n\to\infty$ をとるのですが、この時 $\lim_{n\to\infty} f(x) = f(x)$ になるのはなぜか？ 一般には $\lim_{n\to\infty} f(x) \neq f(x)$ より。

この基本的なことが、手元の本には書いてありません。そこで 瀬山士郎先生（群馬大）に 質問しました所 2度 返事をいただきました。

*1回目のお返事

それによると ポイントは この時「$f(x)$は定数になる。」でした*。それをいうのが肝要に。文字の用法も。この内容は 微積分で重要と思い、レポートを。以下 瀬山先生の書かれたことを参考にしながら、疑問点も

ありましたので、現在私が解釈しましたことを。

証1) マクローリンの定理

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}x^{n-1} + \underbrace{R_n}_{\frac{f^{(n)}(c)}{n!}x^n} \quad ①$$

において

xを固定し、nも固定すると
$f(x)$は R_n以外は 各項定数となり
定数の和は定数より $f(x)$は定数。
ここで①の両辺に、$n \to \infty$をとると、nは変数になるが、nは各自然数をとりながら変化していくので無限の定数の和となり、定数。
(∵ この時 条件より $R_n = 0$。またこの時 各項の定数は、一般項 $\frac{x^n}{n!}$ が 0に収束する*ので $(n \to \infty のとき)$ 無限大にはならない。)
なぜなら

左辺は $f(x)$は定数より (右辺定数より) $\lim_{n\to\infty} f(x) = f(x)$.

右辺は $\lim_{n\to\infty}\left\{ f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}x^{n-1} \right\}$

$$= \sum_{r=1}^{\infty} \frac{f^{(r-1)}(0)}{(r-1)!}x^{r-1}$$

ゆえに $f(x)$は 無限級数となる。

* 証明は追記に。

証2)の

(準備)　一般に $\lim_{n\to\infty}(A-B)$ の計算で計算の結果が 0 ならば $A=B$ とは限らない。(例) $\lim_{n\to\infty}\left(\underbrace{\frac{1}{1+\frac{1}{n}}}_{A}-\underbrace{1}_{B}\right)$

次に $\lim_{n\to\infty}(A-B)$ の答が 0 とわかっている(条件より)時は、$(A-B)$ で $n\to\infty$ のとき 0 より $A-B=0 \to A=B$ がいえる。

(注) $\lim_{n\to\infty}(A-B)$ は 1) $(A-B)$ を 2) $n\to\infty$ にすること。

証2)　マクローリンの定理を

*瀬山先生の2回目のお返事。

$$f(x)-\left\{f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}x^{n-1}\right\}=R_n \quad ①$$

とする。*

① の両辺に $n\to\infty$ をとる。

このとき ① の左辺の $\{\ \}$ 内の x を固定する。

n は変数となるが、各自然数をとりながら変化するので、$\{\ \}$ 内は定数。**

** 理由は、証1)より

ゆえに $\lim_{n\to\infty}\{\underbrace{f(x)}_{A}-\underbrace{\text{定数}}_{B}\}=0$ ② ($\lim_{n\to\infty}R_n=0$ より)

(準備)より このとき $f(x)$ は定数といえる。

③より $\lim_{n\to\infty}f(x)=\lim_{n\to\infty}$(①の{ }内)

$$\overset{\shortparallel}{f(x)} = \sum_{r=1}^{\infty}\frac{f^{(r-1)}(0)}{(r-1)!}x^{r-1}$$

となる。△

（追記） $\lim_{n \to \infty} \frac{x^n}{n!} = 0$ の証明

証） $\left| \frac{x^n}{n!} \right| = \frac{|x|^n}{n!} = \frac{|x|}{1} \cdot \frac{|x|}{2} \cdot \frac{|x|}{3} \cdots \cdot \frac{|x|}{n}$

右辺の各因数は、右方になる程小になり、nが増せば 0に近づく。* 故に　　*xは固定して
今 $0 < K < 1$ なる数Kをとれば、ある因数より後の因数は皆 Kより小である。

今 $\frac{|x|}{r+1}$ 以後が Kより小であるとし

$\frac{|x|}{1} \cdot \frac{|x|}{2} \cdots \cdot \frac{|x|}{r} = A$ とすれば Aは一定の値である。（xは固定して）

故に
$(0<) \left| \frac{x^n}{n!} \right| = A \cdot \frac{|x|}{r+1} \cdots \cdot \frac{|x|}{n} < A \cdot K^{n-r}$

ここで $\lim_{n \to \infty} A K^{n-r} = 0$ （$0<K<1$ より）　$\therefore \lim_{n \to \infty} \frac{x^n}{n!} = 0$

ここで $f^{(n)}(0)$ は、定数　　　Δ

* この証明は、「数学綱要」（上巻Ⅰ）（白石早出雄、裳華房 昭和18刊、昭和22版 P133）によります。

（2010. 1.7 記）