— 行列式の定義（順列による）に
至るまでを主として —

飯島光治

＜はじめに＞

行列式の順列による定義の説明を、種々の本をみるとそれぞれ表現(=説明の仕方)が違っています。するとどれが自分にとって一番明快(=わかり易い)かになります。

このことは、普遍的なこと*というより、個人差があるように思います。 *これが一番わかり易いという

0 歴史的に（いくつかの記述より）

(1)「行列及び行列式」（藤原松三郎 岩波 昭和9年刊 昭和16年版）より

クラメル　代数曲線論（1750）において行列式の思想に到達。

ライプニッツ　1693年にロピタルへの書翰に。

$$\begin{cases} a_1+b_1x+c_1y=0 \\ a_2+b_2x+c_2y=0 \\ a_3+b_3x+c_3y=0 \end{cases}$$

から x, y を消去する問題を。

→ 1693年以前の行列式に関するある記述と共に、ライプニッツの遺稿中にあるもので、この遺稿をゲルハルトが発見して公にしたのは1850年。

関孝和；$(n-1)$次の方程式n個から変数を消去
する問題 → 行列式の思想に到達。
「解伏題之法」(1683)に。
→ これが行列式の理論であることを
初めて林鶴一によって発見(発表は1910)
これは実に数学史上の一大発見。'

(2)「代数学講義」(高木貞治 昭5 初刊 昭45 版)
(改訂新版)より

'西洋の数学史では 行列式は ライプニッツの
書簡(1628)中の記載を初出とするが
その書簡は後年に発見された。
その後 クレーマー(1750) コーシー(1815)
ヤコビ(1841)に至って 現今の行列式論
の基礎ができた。'

なお「算数，数学用語辞典」(武藤徹，三浦基弘
編 東京堂出版 2010.6月刊)には
関孝和が 世界で初めて 行列式を
研究 とあります。

cf ライプニッツ(ドイツ，1646〜1716)
関孝和(1642?〜1708)

1 2元1次連立方程式と3元1次連立方程式

(1) $\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases}$ を解くと

$$x=\frac{b_2c_1-c_2b_1}{a_1b_2-b_1a_2},\quad y=\frac{a_1c_2-c_1a_2}{a_1b_2-b_1a_2}$$

(分母≠0として)

(2) $\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=d_1 \\ a_2x+b_2y+c_2z=d_2 \\ a_3x+b_3y+c_3z=d_3 \end{cases}$ を解くと

$$\begin{cases} x=\dfrac{a_3c_2d_2+a_2b_3d_3+b_2c_3d_1-a_2c_3d_2-b_3c_2d_1-a_3b_2d_3}{a_3b_1c_2+a_2b_3c_1+a_1b_2c_3-a_3b_2c_1-a_1b_3c_2-a_2b_1c_3} \\ y=\dfrac{a_3b_1d_3+a_1c_3d_2+b_3c_1d_1-a_3c_1d_2-a_1b_3d_3-b_1c_3d_1}{a_3b_1c_2+a_2b_3c_1+a_1b_2c_3-a_3b_2c_1-a_1b_3c_2-a_2b_1c_3} \\ z=\dfrac{b_1c_2d_1+a_1b_2d_3+a_1c_1d_2-a_1c_2d_2-a_2b_1d_3-b_2c_1d_1}{a_3b_1c_2+a_2b_3c_1+a_1b_2c_3-a_3b_2c_1-a_1b_3c_2-a_2b_1c_3} \end{cases}$$

(分母≠0として)

＊ (2)の解き方については、後述。

ここで (1)(2)の解の分母を

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix},\quad \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

とかき 2行2列、3行3列の行列式という。

(横を行、たてを列とする。)

2 行列式の展開式における項の符号について

3元1次の連立方程式の解の分母をみると

$a_3b_1c_2 + a_2b_3c_1 + a_1b_2c_3 - a_3b_2c_1 - a_1b_3c_2 - a_2b_1c_3$

において その添数の順列について、

今 1 2 3 の順を自然の順とし 数字が左→右にいくにつれて 大,小が逆になっている時は転倒(あるいは逆位)という。

上記において 3 1 2 は 転倒の数が 3について 2コのみ。2 3 1は 2について1コ, 3について1コより 計2コ

1 2 3は 0コ 3 2 1は 3コ, 1 3 2は1コ, 2 1 3は1コ。 すると 転倒の数が 偶数コ(0を含)の時は 正(プラス), 奇数コの時は 負(マイナス)の符号になっている。

2元1次の $a_1b_2 - a_2b_1$ もそうなっている。

3 順列の転倒について成り立つ事柄

<定理> 1, 2, 3, …, n の1つの順列を, p, q, …s, …t, …v とし, その元素のいずれか2つ, たとえば s と t とを交換する時は, 転倒の数は奇数だけ増減する。

証）1）sとtが隣り合っている時。 i.e.（zp5）$\cdots st \cdots$の時

。$s<t$のとき　tsとなり転倒が1つ増す。

。$s>t$のとき　tsは順位で，転倒が1つ減る。

この時 st以外の所は転倒の数に影響しない。

いずれにしても 1 増減する。

（$\cdots ts \cdots$の時も同様）

2）sとtが離れている時

たとえば sとtの間にはkコ（$k \geq 1$）の文字 $a_1, a_2, \cdots, a_k$があるとする。*

i.e. $\cdots s\, a_1 a_2 \cdots a_k\, t \cdots$で$s$を1文字ずつ右へずらしていくと，$k$回で

$\cdots a_1 a_2 \cdots a_k\, s\, t$となり，$(k+1)$回で

$\cdots a_1 a_2 \cdots a_k\, t\, s$となる。次に

tを左に1文字ずつずらしていくと，k回で$\cdots t\, a_1 a_2 \cdots a_k\, s \cdots$となる。

（この時 回数を考えているので

$\cdots a_k \cdots a_2 a_1 t$とはじめに考えても同じ）すると合計$(2k+1)$回で

交換される。1回ごとに1増減されるから 奇数の数だけ転倒の数が増減される。

。従って はじめ偶順列（転倒の数が偶数コ）は奇順列（転倒の数が奇数コ）になり

はじめ奇順列は，偶順列となる。

* この表現がわかり易く参考になる。

∵)

1) 偶数コ

	①回目の交換	②回目の交換	③回目の交換
偶数コ	+1	+1	<
		−1	<
	−1	+1	<
		−1	<
	いずれも奇数コ,	いずれも偶数コ	いずれも奇数コ

→ 偶数コからスタートすると奇数回目は奇数コとなる。

2) 奇数コからスタートしても同様。

<系1> $1\,2\,3\cdots n$（または $a\,b\,c\cdots\ell^{*}$）から作った偶順列と奇順列の個数は、相等しく従って各々 $\dfrac{n!}{2}$ ずつある。

* 文字の時は、アルファベット順を自然の順序とする。

証）はじめ偶順列が p コ、奇順列が q コあるとする。 $p+q=n!$ ①

ここで p コの異なる偶順列のある特定の２文字を交換すると、p コの異なる*奇順列となるから、少なくとも $p \leqq q$ ②

（p コのうちのいくつかが、q コのうちのいくつかと一致するかも知れないが）

同様にして $p \geqq q$ ③

②③より $p=q$, ①より $p=q=\dfrac{n!}{2}$

* これらの奇順列の中に同じものはない。もし同じものがあったとすると特定の２文字を交換して再び元の偶順列にもどす時、それは同じ偶順列となり仮定に反する。

∵はじめ異なる p コの偶順列とした

（系2）$\alpha_p\beta_q\cdots\delta_s\cdots\eta_t\cdots\lambda_u$ のいずれか2文字たとえば δ_s（デルタ）と η_t（イータ）を交換する時は、文字における転倒の増減数と数字における転倒の増減数との和は常に偶数である。

（但し $\alpha\beta\cdots\lambda$ は、$ab\cdots l$ のある順列とし、$pq\cdots u$ は、$12\cdots n$ のある順列とする。

証）この時 文字、数字共に奇数回転倒する（定理より）。奇数＋奇数＝偶数 より。

（系3）積 $a_pb_qc_r\cdots l_u$ をかき換えて $\alpha_1\beta_2\gamma_3\cdots\lambda_n$ とするとき、順列 $pqr\cdots u$ と順列 $\alpha\beta\gamma\cdots\lambda$ とは 共に偶順列か共に奇順列である。

証）$a_pb_qc_r\cdots l_u$ からスタートして a_p を α_1 と交換し、次に b_q を β_2 とを交換し、ついに $\alpha_1\beta_2\cdots l_u$ がえられる。そして系2により毎度の交換における文字及び添数における転倒の増減数の和は、偶数より全体においても偶数*。ここで $a_pb_q\cdots l_u$ では $ab\cdots l$ の転倒の数は0、えられた順列 $\alpha_1\beta_2\cdots\lambda_n$ の添数の転倒の数は0より、全体の和が偶数より、系3の結論がいえる。

*偶＋偶＋…＋偶＝偶より。

* この系3は、後述の行列式の性質の証明に、用いる。

$\boxed{4}$ 行列式の定義

たとえば 4行4列 (行列式では m行n列 という時、m＝n とする。)

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix}$$

とは？　* 横を行、たてを列とする。

各行各列より 1文字ずつ もれなく、ダブリ無く取り出し、その積をつくり、その総和。
ここで 項の符号は a, b, c, d をアルファベット順に並べた時 添数の順列が 偶順列⇒プラス、奇順列⇒マイナス とする。
(なお 1つの項 たとえば a_1 のある項は 1行1列から、a_1 以外の文字は、取らない。)

添数の順列と符号は

1234 +	1324 −	1423 +	2134 −
1243 −	1342 +	1432 −	2143 +
2314 +	2413 −	3124 +	3214 −
2341 −	2431 +	3142 −	3241 +
3412 +	4123 −	4213 +	4312 −
3421 −	4132 +	4231 −	4321 +

となるので、

上の行列式は $a_1b_2c_3d_4 + a_1b_3c_4d_2 + a_1b_4c_2d_3 + a_2b_1c_4d_3 + a_2b_3c_1d_4 + a_2b_4c_3d_1 + a_3b_1c_2d_4 + a_3b_2c_4d_1 + a_3b_4c_1d_2 + a_4b_1c_3d_2 + a_4b_2c_1d_3 + a_4b_3c_2d_1 - a_1b_2c_4d_3 - a_1b_3c_2d_4$

$- a_1 b_4 c_3 d_2 - a_2 b_1 c_3 d_4 - a_2 b_3 c_4 d_1 - a_2 b_4 c_1 d_3$
$- a_3 b_1 c_4 d_2 - a_3 b_2 c_1 d_4 - a_3 b_4 c_2 d_1 - a_4 b_1 c_2 d_3$
$- a_4 b_2 c_3 d_1 - a_4 b_3 c_1 d_2$ となる。

一般の n 行 n 列の時も同様で

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & \cdots & l_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & \cdots & l_2 \\ & & \cdots & & \\ a_n & b_n & c_n & \cdots & l_n \end{vmatrix} = \sum \pm a_p b_q c_r \cdots l_v$$

となる。（±の符号は $pqr\cdots v$ が偶順列 ⇒ ＋。奇順列 ⇒ －。）

$\boxed{5}$ 行列式の1つの性質の証明

（性質）行列式において行と列を交換しても両者は等しい。

（例）
$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \quad Ⓐ$$

証）
$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & \cdots & l_1 \\ a_2 & b_2 & & l_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n & b_n & & l_n \end{vmatrix} = \sum \pm a_p b_q c_r \cdots l_v \quad ①$$

上の式の行と列を入れかえて之られる行列式を Δ' とすれば、行列式の定義により

$\Delta' = \sum \pm \alpha_1 \beta_2 \gamma_3 \cdots \lambda_n$ ③ と書ける。

《 Ⓐにおいて

左辺 $= a_1b_2c_3 + a_3b_1c_2 + a_2b_3c_1$
$\quad - a_3b_2c_1 - a_1b_3c_2 - a_2b_1c_3$ *

＊3行3列においては、サラスの方法がある。

一方 右辺 $= a_1b_2c_3 + c_1a_2b_3 + c_2b_1a_3$
$\quad - a_3b_2c_1 - a_1b_3c_2 - c_3a_2b_1$ **

＊＊まずサラスの方法で。

$\quad = a_1b_2c_3 + c_1a_2b_3 + b_1c_2a_3$
$\quad - c_1b_2a_3 - a_1c_2b_3 - b_1a_2c_3$ と

右辺は、確かに ②の形に書ける。》

ここで 系3 により ①と③の同じ因数の項は共に偶順列か共に奇順列より各符号は一致するので。

（注） この性質の証明は 行列式をどう説明するか（定義するか）で、その証明がかわってきます。

$\boxed{6}$ 追記

3元1次の連立方程式の解法について

(1)
$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 & ① \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 & ② \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 & ③ \end{cases}$$

解1) ＜方針＞ z 消去のため

$\begin{cases} ① \times c_2 - ② \times c_1, \\ ① \times c_3 - ③ \times c_1 \end{cases}$ で x, y をだす。

次に x の解の分母を Δ、分子を Δ'
y の解の分子を Δ''（分母は Δ）

として ①に代入して、分母を払うと
$a_1\Delta' + b_1\Delta'' + c_1z\Delta = d_1\Delta$ を計算して

zをだす。

$$\begin{cases} x = \dfrac{b_1c_2d_3+b_2c_3d_1+b_3c_1d_2-b_1c_3d_2-b_2c_1d_3-b_3c_2d_1}{\underset{=\Delta}{a_1b_2c_3+a_2b_3c_1+a_3b_1c_2-a_1b_3c_2-a_2b_1c_3-a_3b_2c_1}} \\ y = \dfrac{a_1c_3d_2+a_2c_1d_3+a_3c_2d_1-a_1c_2d_3-a_2c_3d_1-a_3c_1d_2}{\Delta} \\ z = \dfrac{a_1b_2d_3+a_2b_3d_1+a_3b_1d_2-a_1b_3d_2-a_2b_1d_3-a_3b_2d_1}{\Delta} \end{cases}$$

以上解1は「ふつう」のやり方.

解2) 「行列及び行列式」(藤原松三郎)より

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=d_1 & (1) \\ a_2x+b_2y+c_2z=d_2 & (2) \\ a_3x+b_3y+c_3z=d_3 & (3) \end{cases}$$

z消去 $(1)\times c_2-(2)\times c_1$

$$(a_1c_2-a_2c_1)x+(b_1c_2-b_2c_1)y=d_1c_2-d_2c_1 \quad (4)$$

$(3)\times c_1-(1)\times c_3$

$$(a_3c_1-a_1c_3)x+(b_3c_1-b_1c_3)y=d_3c_1-d_1c_3 \quad (5)$$

(以上 解1と同じ)

次に (1)(2)(3)を平等に取り扱うために

(2)(3)の両辺に $(2)\times c_3-(3)\times c_2$

$$(a_2c_3-a_3c_2)x+(b_2c_3-b_3c_2)y=d_2c_3-d_3c_2 \quad (6)$$

(6)(5)(4)における yの係数は

$$b_2c_3-b_3c_2,\quad b_3c_1-b_1c_3,\quad b_1c_2-b_2c_1$$

これらにそれぞれ b_1, b_2, b_3 をかけて加えると0になる。よって (6)(5)(4)の両辺にそれぞれ b_1, b_2, b_3 をかけて加えると、yの係数は0になるから

$$\{b_1(a_2c_3-a_3c_2)+b_2(a_3c_1-a_1c_3)+b_3(a_1c_2-a_2c_1)\}x$$

$$= b_1(d_2c_3 - d_3c_2) + b_2(d_3c_1 - d_1c_3) + b_3(d_1c_2 - d_2c_1)$$

これから x がでる。

同様にして xの係数（(6)(5)(4)の）は

$$a_2c_3 - a_3c_2,\quad a_3c_1 - a_1c_3,\quad a_1c_2 - a_2c_1$$

これらにそれぞれ a_1, a_2, a_3 をかけて、加えると xの係数は 0 になるから、同様にして yがでる。zは たとえば 解1)のようにして、でる。

解3)「線形代数」(田島一郎 共立出版 1970刊) より

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = k_1 & (1) \\ a_2x + b_2y + c_2z = k_2 & (2) \\ a_3x + b_3y + c_3z = k_3 & (3) \end{cases}$$

まず z 消去のため

$(1)\times c_2 - (2)\times c_1$ (4)

$(2)\times c_3 - (3)\times c_2$ (5)

次に (4)(5) から y を消去して

$$(4)\times(b_2c_3 - b_3c_2) - (5)\times(b_1c_2 - b_2c_1)$$

$$\{(a_1c_2 - a_2c_1)(b_2c_3 - b_3c_2) - (a_2c_3 - a_3c_2)(b_1c_2 - b_2c_1)\}x$$
$$= (k_1c_2 - k_2c_1)(b_2c_3 - b_3c_2) - (k_2c_3 - k_3c_3)(b_1c_2 - b_2c_1) \quad (6)$$

ここで x の係数と右辺とを比べてみると

左辺の{ }内の a_1, a_2, a_3 の代わりに k_1, k_2, k_3 となったものが、右辺という同じ構造になっている。

そこで、左辺の{ }内を a_1, a_2, a_3 について整理すると

(6)の左辺 $= c_2\{a_1(b_2c_3-b_3c_2)-a_2(b_1c_3-b_3c_1)+a_3(b_1c_2-b_2c_1)\}$

となるので (6)の右辺も

$$c_2\{k_1(b_2c_3-b_3c_2)-k_2(b_1c_3-b_3c_1)+k_3(b_1c_2-b_2c_1)\}$$

となるはず。 $c_2 \neq 0$ とすれば 両辺を c_2 でわったものを (7)とする。 ところで (7)の左辺 は

$$a_1\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - a_2\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + a_3\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$ とかけるので

(このレポート P3)

ここで
$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - a_2\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + a_3\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

と定義する。(注 田島先生の方法)

行列式の記号を用いると

$$\underbrace{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}_{①} x = \underbrace{\begin{vmatrix} k_1 & b_1 & c_1 \\ k_2 & b_2 & c_2 \\ k_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}_{②}$$

$$\therefore x = \frac{②}{①}$$

y については

$$\begin{cases} b_1y + a_1x + c_1z = k_1 \\ b_2y + a_2x + c_2z = k_2 \\ b_3y + a_3x + c_3z = k_3 \end{cases}$$

とみると
$$y = \frac{\begin{vmatrix} k_1 & a_1 & c_1 \\ k_2 & a_2 & c_2 \\ k_3 & a_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} b_1 & a_1 & c_1 \\ b_2 & a_2 & c_2 \\ b_3 & a_3 & c_3 \end{vmatrix}}$$

z については

$$\begin{cases} c_1z + a_1x + b_1y = k_1 \\ c_2z + a_2x + b_2y = k_2 \\ c_3z + a_3x + b_3y = k_3 \end{cases}$$

とみて
$$z = \frac{\begin{vmatrix} k_1 & a_1 & b_1 \\ k_2 & a_2 & b_2 \\ k_3 & a_3 & b_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} c_1 & a_1 & b_1 \\ c_2 & a_2 & b_2 \\ c_3 & a_3 & b_3 \end{vmatrix}}$$

☆これは見事です。
でも上記の定義だと一般の n 行列の時はどうなるのでしょうか。

なお このレポートの $\boxed{3}$ は、「有限解析緒論」（上）（渡辺義勝 丸善出版 昭18刊, 昭22版）より引用しました。表現を多少変え, 追加した所もありますが。

＜おわりに＞

このテーマについて、手元にあるこの箇所を読むと、それぞれ著者の把握の違いが表現になってあります。1つの本を読みそれで了解できれば良いのですが、仲々そうはいかなく、自分が納得するものを求めることになります。以前から行列式はそうでした。種々の本を読み, 自分なりに納得したことを、レポートしました。

私にとって以上が数学の勉強法となります。納得できれば数学の1つ1つのテーマが、それぞれ1つ1つの世界を作っている感がします。

なお行列式をどうみるかについて、順列のみではない見方もあります。

（2010. 8. 25 記）