□ 正規分布の式 $y=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$ をいかに導くか

飯島光治

はじめに　統計における最重要な式の1つである
上記の式を、数学的に導くには大変な
計算のため、ふつう与えてしまいます。
ここにご紹介するのは、共に誤差法則により
「統計的研究法」(小倉金之助 積善館 1925刊)
では データーにもとづいて実験的に導き、上の
式の1歩手前までいっています。
「統計法とその教育上の応用」(半田正吉、矢野建治
共立出版 1944刊)では より数学的(小倉先生の
本より)に導いています。共に「高校数学」の範囲
(中には?)の数学で。
多くの本にある数式での証明は、たとえフォロー
できても、実感的にピンときません(私には)。
上記2つの内容は、実感的に納得できるもの
です。「統計法とその教育上の応用」には
1809年 ガウス(ドイツ 1777~1855)の研究した方法でとあります。

$\boxed{1}$ 「統計的研究法」より

データとして イギリスに生まれた成人の身長(1883年、
明治16年) 8585人のを用いている。
その前に 実例により グラフにかくと y軸を中心とした
山型になる例が示され、このグラフの式を求め
ていこうと。

実験式として $\underline{y = A\cdot B^{-x^2}}$ をとりあげる。(A, B>0 (B>1 として)

具体例として $y = 2^{-x^2}$ (A=1, B=2のとき)

$y = 1.5\times 3^{-x^2}$ (A=1.5, B=3のとき) のグラフを

xの値を与え、yを求めて点にとってグラフをかくと

共に、y軸を中心とした山型の対称形となる。

ここで先のイギリス人の成人の身長の例に。

<表1>

高さ(吋)	人数	高さ	人数
57−	2	68−	1230
58−	4	69−	1063
59−	14	70−	646
60−	41	71−	392
61−	83	72−	202
62−	169	73−	79
63−	394	74−	32
64−	669	75−	16
65−	990	76−	5
66−	1223	77−	2
67−	1329	計	8585

(注) 吋＝インチ、1インチ≒2.5(cm)

たとえば、上記の67インチ≒167.5(cm)

左表より 平均 $M = 67.46$ 吋

$\fallingdotseq 67.5$ として

標準偏差 $\sigma = 2.57$ 吋

<表2> → $\sigma^2 = 6.6049$

$\fallingdotseq 6.6$ として

<誤差の表>

ξ (クサイ)	f	ξ	f
0	1330	±5	185
±1	1225	±6	80
±2	1025	±7	37
±3	660	±8	15
±4	390	±9	5
		±10	2
		計	4954

cf $8585 \div 2 = 4292.5$

<誤差の表について>

$\underline{\xi = X(\text{高さ}) - M(\text{平均})}$

なお 小倉先生の本には、±1 → 1220

となっているが(概算として)、私は M=67.5より

表1より $(1223+1230)\div 2 = 1226.5 \to 1225$ としました。

以下 数字をかえた所があります。

以下 $f = A\cdot B^{-\xi^2}$ として

表2より $\xi = 0$ のとき $f = 1330$ より $A = 1330$

ここで誤差の法則の1つとして誤差の小さい方は数が多く、誤差の大きいのは少なくなるがあるのでNを大きくすると、Aはふえ、従ってσは小さくなる。

→ Aは Nに比例して、σに反比例するとしてみる。

i.e.（即ち） $A = \frac{kN}{\sigma}$ （k：定数）とかけるとする。

$$\rightarrow k = \frac{A\sigma}{N} = \frac{1330 \times 2.57}{8585} = 0.398 \fallingdotseq 0.4$$

$$\therefore A = \frac{0.4N}{\sigma}$$

次に Bの値。ここで ξ の代わりに $\frac{\xi}{\sigma}$ * とする。（標準測定値という。）

* なぜかは、2つを比較し単位が違うとき、σでわると数となり、単位の違いがなくなる。

$f = A \cdot B^{-\xi^2} = A(B\sigma^2)^{-\left(\frac{\xi}{\sigma}\right)^2}$ とする。

さらに $C = B\sigma^2$ とおくと

$$f = A \cdot C^{-\left(\frac{\xi}{\sigma}\right)^2} \quad ①$$

$$\rightarrow \log f = \log A - \left(\frac{\xi}{\sigma}\right)^2 \log C$$

$$\rightarrow \log C = \left(\frac{\sigma}{\xi}\right)^2 (\log A - \log f)$$

∘ $\xi = \pm 1$ のとき

$$6.6(\log 1330 - \log 1225) = 0.25$$

∘ $\xi = \pm 2$ のとき $\frac{6.6}{4 \text{〃} \xi^2}(\log 1330 - \log 1025) \fallingdotseq 0.19$

以下同様にして

$\xi = \pm 3$ のとき	0.22
$\xi = \pm 4$ 〃	0.22
$\xi = \pm 5$ 〃	0.23
$\xi = \pm 6$ のとき	0.22
$\xi = \pm 7$ 〃	0.21
$\xi = \pm 8$ 〃	0.20
$\xi = \pm 9$ 〃	0.20
$\xi = \pm 10$ 〃	0.19

すると 平均値 $= \frac{1}{10}(0.25 + 0.19 + \cdots + 0.19) = 0.213$

$$\therefore \log C = 0.213 \rightarrow C = 10^{0.213}$$

①に代入して $f=\dfrac{0.4N}{\sigma}\cdot 10^{-0.213\left(\frac{\xi}{\sigma}\right)^2}$

$=\dfrac{0.4N}{\sigma}\cdot\left(10^{0.426}\right)^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\xi}{\sigma}\right)^2}$

ここで $a=10^{0.426}$ とおくと $\log a=0.426$

対数表より $a\fallingdotseq 2.67$

$\therefore f=\dfrac{0.4N}{\sigma}(2.67)^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\xi}{\sigma}\right)^2}$

ここで $0.4=\dfrac{4}{10}=\dfrac{1}{2.5}=\dfrac{1}{\sqrt{6.25}}$ となるので

$\therefore f=\dfrac{N}{\sqrt{6.25}\,\sigma}\cdot(2.67)^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\xi}{\sigma}\right)^2}$ ②

ここで 正式（正確）には

$\begin{cases} 2.67\to 2.7183\cdots=e, & * \\ 6.25\to 6.2832\cdots=2\pi \end{cases}$ となり

* 誤差は
e の方は 0.05
π の方は 0.03

②は $f=\dfrac{N}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\xi}{\sigma}\right)^2}$ ③ と知られている。

さらに $y=\dfrac{f\sigma}{N}$, $x=\dfrac{\xi}{\sigma}$ とおくと

$f=y\cdot\dfrac{N}{\sigma}$

③は $y\cdot\dfrac{N}{\sigma}=\dfrac{N}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\cdot e^{-\frac{1}{2}x^2}$

$\left(\div\dfrac{N}{\sigma}\right)$

$\to y=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{1}{2}x^2}$ ③′

が得られる。

☆ 小倉先生の内容では

②→③に、論理的飛躍がありますが、
一歩手前まできています。

$\boxed{2}$ 「統計法 その教育上の応用」より

まず誤差について $x_K = X_K - \xi$ $(K=1, 2, \cdots, N)$ を
真の誤差（ξは真の値，ξは得られない。Xは測定値）
ξのかわりに最確値 a（aは測定値の平均値とする。）
$\xi_K = X_K - a$ をみかけの誤差という。

次に
誤差の種類として定誤差，過失による誤差，
偶然による誤差があり，前2つは防げる。
以下みかけの誤差，偶然による誤差を考える。
種々のデーターより，誤差の法則*として

* 偶然による誤差の時

(1) 大きな誤差は小さな誤差よりもおこる回数が少ない。
(2) 誤差の分布は対称的である。即ち
同じ大きさの正の誤差と負の誤差とは同じ
回数だけおこる。
(3) 余り大きい誤差はおこらない。

以上を前提として
真値を ξ，測定値を $X_1, X_2, \cdots, X_N$ として
誤差を $x_1, x_2, \cdots, x_N$ $(x_K = X_K - \xi)$ とする。
また各誤差のおこる確率をそれぞれ
$p_1, p_2, \cdots, p_N$ とする。（唯1つの誤差たとえば
x_1のおこる確率は0とみなす。）ここにいう確率とは
x_Kを含むある小範囲内の誤差のおこる確率のこと。
ここで誤差xとその確率pとは関数関係に
あると考えられるので $p = \overset{ファイ}{\varphi}(x)$ とおける。
i.e. $p_1 = \varphi(x_1),\ p_2 = \varphi(x_2), \cdots, p_N = \varphi(x_N)$
次に真値ξは知ることができない。そこで
ξに色々な値を試みる，即ちξを変数

とみると、xはqの関数となり、またPも
qの関数（合成関数）となる。

$\varphi(x)$の形は、誤差の法則（3ケ条）をみたす最も自然的な形 i.e. 試みの系列の誤差 $x_1, x_2, \cdots, x_N$の全体的にみておこる確率が最大となる場合に生じると考える。

測定の誤差は、決して同時におこらないが同時に起こるものと考えて差支えない。

また偶然の誤差より各々の誤差は互いに独立である。互いに独立な事象が同時におこる確率は

$$P = P_1 P_2 \cdots P_N = \varphi(x_1)\varphi(x_2)\cdots\varphi(x_N) \quad (A)$$

が最大となるように$\varphi(x)$の形を定めればよい。

◎「Pの値を最大になる$\varphi(x)$は

$$\varphi(x) = c\,e^{-h^2x^2}$$

の形になる。

ここにc、hは正の定数で、eは自然対数。」

証）Pは唯1つの極大をもち、極小はないものとする。Pが最大なとき $\dfrac{dP}{dq} = 0$

(A)の両式に底をeとする対数をとれば

$$\log P = \log\varphi(x_1) + \log\varphi(x_2) + \cdots + \log\varphi(x_N)$$

両辺をqについて微分すると、合成関数の微分法により

$$\frac{1}{P}\cdot\frac{dP}{dq} = \frac{d}{dx_1}\left[\log\varphi(x_1)\right]\frac{dx_1}{dq} + \frac{d}{dx_2}\left[\log\varphi(x_2)\right]\frac{dx_2}{dq} + \cdots + \frac{d}{dx_N}\left[\log\varphi(x_N)\right]\frac{dx_N}{dq}$$

ここで $x_K = X_K - q$ より $\dfrac{dx_K}{dq} = -1$ $(K=1,2,\cdots,N)$
(X_Kは定数)

従って $\overset{\text{プサイ}}{\psi}(x) = \dfrac{d}{dx}[\log\varphi(x)]$ とおくと

$$\underline{\psi(x_1)+\psi(x_2)+\cdots\psi(x_N)=0} \quad (1)$$

また N(測定数)が十分大きければ
誤差の法則(2)より

$$\underline{x_1+x_2+\cdots+x_N=0} \quad (2)$$

次に しばらく $x_1, x_2, \cdots, x_N$を定数とする。
今 Nコの誤差中の任意の2つ x_r, x_sを取り

$$x_r' = x_r+\varepsilon, \quad x_s' = x_s-\varepsilon$$
(εは極めて絶対値の小さな数)

とおくと

$$x_1, x_2, \cdots, x_r' \cdots x_s' \cdots x_N \quad (x_r, x_s\text{は除外})$$

は (2)の関係をみたすから、誤差の1事例とみなせる。 従って

$$\psi(x_1)+\psi(x_2)+\cdots+\psi(x_r')+\cdots+\psi(x_s')+\cdots+\psi(x_N)=0 \quad (3)$$

をみたす。 $\underset{\sim\sim}{(1)}-(3)$

$$\psi(x_r)+\psi(x_s)-\psi(x_r')-\psi(x_s')=0$$

$$\rightarrow \psi(x_r)+\psi(x_s)=\psi(x_r')+\psi(x_s')$$

$$\text{i.e. } \psi(x_r)+\psi(x_s)=\psi(x_r+\varepsilon)+\psi(x_s-\varepsilon)$$

$$\therefore \frac{\psi(x_r+\varepsilon)-\psi(x_r)}{\varepsilon} = \frac{\psi(x_s-\varepsilon)-\psi(x_s)}{-\varepsilon}$$

$\varepsilon \to 0$とすると

$$\left[\frac{d}{dx}\psi(x)\right]_{x=x_r} = \left[\frac{d}{dx}\psi(x)\right]_{x=x_s}$$

x_r, x_s は x_K $(K=1,2,\cdots,N)$ 中の任意の2つより

結局 $\left[\dfrac{d}{dx}\psi(x)\right]_{x=x_1} = \left[\dfrac{d}{dx}\psi(x)\right]_{x=x_2} = \cdots = \left[\dfrac{d}{dx}\psi(x)\right]_{x=x_N}$

$\psi(x)$の導関数は一定。

ここで $x_1, x_2, \cdots, x_N$ は誤差の系列の任意の1つと考えてよいから $\psi(x)$の導関数の値は xのすべての値について一定。

$$\frac{d}{dx}\psi(x) = K \quad (Kは定数)$$

$$\rightarrow \psi(x) = Kx + C' \quad (C'は定数)$$

*レポートP7

この関係を(1)*に代入すると

$$K(x_1 + x_2 + \cdots + x_N) + NC' = 0$$

レポートP7 →(2)より $\quad C' = 0$

$$\therefore \psi(x) = Kx$$

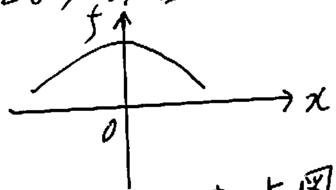
$$\rightarrow \frac{d}{dx}[\log \varphi(x)] = Kx$$

$$\rightarrow \log \varphi(x) = \frac{1}{2}Kx^2 + C'' \quad (C''は定数)$$

$$\therefore \varphi(x) = e^{\frac{1}{2}Kx^2 + C''} \quad (4)$$

ここで 誤差の法則(1)により、小さな誤差は、大きな誤差より多くおこるから $\underline{K<0}$

($K<0$ ∵ 一般に上のことより誤差xとその度数(従ってその確率)は →



の形。

$$\varphi(x) = e^{\frac{1}{2}Kx^2 + C''}$$

$$\rightarrow \varphi'(x) = Kx\,e^{\frac{1}{2}Kx^2 + C''}$$

1) $x \geqq 0$のとき 上図より $\varphi(x)$は単調減少 → $\varphi'(x) \leqq 0$
$e^{\frac{1}{2}Kx^2 + C''} > 0$より $K<0$
($K \neq 0$として)

2) $x \leqq 0$のとき 上図より $\varphi(x)$は単調増加 → $\varphi'(x) \geqq 0$
→ $K<0$)

$\frac{1}{2}K = -h^2 \ (h>0)$ とおく。

また $e^{C''} = C$ とおくと (4)は

$$\varphi(x) = Ce^{-h^2x^2}$$

の形になる。//

次の課題は、c と h の形をきめることに。

今まで真値 g で $x_K = X_K - g$ としたが、g はわからないので、みかけの誤差（g のかわりに測定値の平均値 M を）で代用する。N を十分多くすれば $\varphi(x) = ce^{-h^2x^2}$ の形はかわらないと考える。

さてある量の N コの測定値を、区分の大きさが Δ の等しい階級に分けたとし

それらの階級の中央値を $X_1, X_2, \cdots, X_n$

度数を $f_1, f_2, \cdots, f_n$ $(\sum f_n = N)$ とする。

誤差 ξ（クサイ）は、

$\xi_1 = X_1 - M$, $\xi_2 = X_2 - M$, $\cdots$, $\xi_n = X_n - M$ （M は平均値）

そして ξ_K の $\xi_K - \frac{\Delta}{2}$, $\xi_K + \frac{\Delta}{2}$ での確率を $\frac{f_K}{N}$ と考える。

i.e. $p_1 = \frac{f_1}{N}$, $p_2 = \frac{f_2}{N}$, $\cdots$, $p_n = \frac{f_n}{N}$ $\underset{\sim}{(1)}$ （$f_K \neq 0$ 従って $p_K \neq 0$ とする。）

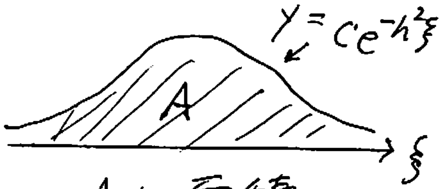
$$p_K = ce^{-h^2\xi_K^2} \quad (K = 1, 2, \cdots, n) \quad \underset{\sim}{(2)}$$

が成り立つとする。

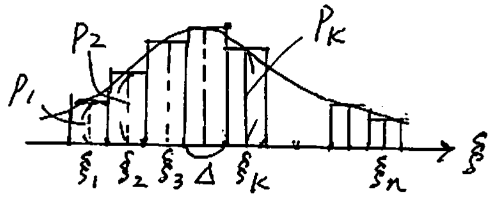
ここで (1) より $\sum p_K = 1$

従って $\sum p_K = \sum ce^{-h^2\xi^2} = 1$

$$\rightarrow \frac{1}{\Delta}\sum p_K \Delta = 1$$



A は面積



$\sum p_K$ は上の右図のヒストグラムの面積。

ここで Δ を限りなく小さくしていくと、極限において面積 A と等しくなる。

ここで $A=\int_{-\infty}^{\infty} c e^{-h^2\xi^2} d\xi = \dfrac{c\sqrt{\pi}}{h}$ がいえる。

（いい）今 $\xi \to x$ にかえると

まず $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$ （理由は補記に）

がいえ．$\underset{(h>0)}{hx=t}$ とおくと $x=\dfrac{t}{h}$

$\to dx = \dfrac{1}{h} dt$

x	$-\infty \to \infty$
t	$-\infty \to \infty$

より $\int_{-\infty}^{\infty} c e^{-h^2x^2} dx$

$= \int_{-\infty}^{\infty} c e^{-t^2} \cdot \dfrac{1}{h} dt$

$= \dfrac{c}{h} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} dt = \dfrac{c\sqrt{\pi}}{h}$ ）

すると $\sum p_k \Delta \fallingdotseq \dfrac{c\sqrt{\pi}}{h}$

これを $\dfrac{1}{\Delta}\sum p_k \Delta = 1$ に代入すると $\dfrac{1}{\Delta} \cdot \dfrac{c\sqrt{\pi}}{h} = 1$

$\to c \fallingdotseq \dfrac{h\Delta}{\sqrt{\pi}}$ (3)

$\therefore p_k = \dfrac{h\Delta}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2\xi_k^2}$ $(k=1,2,\cdots,n)$ (4)

次に h の値を定める。

今 ξ_1 なる f_1 コの誤差，ξ_2 なる f_2 コの誤差，$\cdots$ ξ_n なる f_n コの誤差が同時におこる確率 P は

$P = (\underbrace{p_1 p_1 \cdots p_1}_{f_1 コ})(\underbrace{p_2 p_2 \cdots p_2}_{f_2 コ}) \cdots\cdots (\underbrace{p_n p_n \cdots p_n}_{f_n コ})$

$= p_1^{f_1} p_2^{f_2} \cdots p_n^{f_n}$，(4) を代入すると

$= \left(\dfrac{h\Delta}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2\xi_1^2}\right)^{f_1} \cdots\cdots \left(\dfrac{\Delta}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2\xi_n^2}\right)^{f_n}$

$= \left(\dfrac{h\Delta}{\sqrt{\pi}}\right)^N e^{-h^2\sum f_k \xi_k^2} = \left(\dfrac{\Delta}{\sqrt{\pi}}\right)^N \cdot h^N e^{-h^2 N\sigma^2}$

$\left(\sum f \fallingdotseq N;\quad \sigma = \sqrt{\dfrac{1}{N}\sum f_k \xi_k^2}\right)$

$\uparrow$ $x_1, x_2, \cdots, x_n$ の標準偏差

ここで h は P が最大となるような h。$\Leftrightarrow \dfrac{dP}{dh}=0$

$$\frac{dP}{dh}=\left(\frac{\Delta}{\sqrt{\pi}}\right)^N\cdot\left\{(h^N)'e^{-h^2N\sigma^2}+h^N\cdot\left(e^{-h^2N\sigma^2}\right)'\right\}$$

$$=\left(\frac{\Delta}{\sqrt{\pi}}\right)^N\left\{Nh^{N-1}\cdot e^{-h^2N\sigma^2}+h^N(-N\sigma^2 2h\, e^{-h^2N\sigma^2})\right\}$$ (積の微分法)

$$=\left(\frac{\Delta}{\sqrt{\pi}}\right)^N\cdot e^{-h^2N\sigma^2}\cdot Nh^{N-1}(1-2h^2\sigma^2)=0$$

$$\therefore\ 1-2h^2\sigma^2=0\rightarrow h^2=\frac{1}{2\sigma^2}$$

$h>0$ より $h=\dfrac{1}{\sqrt{2}\,\sigma}$

よって $c\fallingdotseq\dfrac{h\Delta}{\sqrt{\pi}}$ (P10の(3))より

$$c\fallingdotseq\frac{\Delta}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\quad *$$

P9の(2)(P_K, ξ_K の K を除いて)に代入して、$P=\dfrac{\Delta}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\xi}{\sigma}\right)^2}$

$P=\dfrac{f}{N}$ とおくと $f=\dfrac{N\Delta}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\xi}{\sigma}\right)^2}$ (5)

ここで、さらに $y=\dfrac{f\sigma}{N\Delta}$ **, $x=\dfrac{\xi}{\sigma}$ とおくと

** i.e. $f=\dfrac{yN\Delta}{\sigma}$

(5)は $\underline{y=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}x^2}}$ となる。

* 以上で近似($\fallingdotseq$)の式は、N を十分多くとると、等式(=)になると考える。

＜補記＞

(1) $\varphi(x)=e^{\frac{1}{2}Kx^2+c'}$ のグラフ

$\varphi(x)=e^{c'}\cdot e^{\frac{1}{2}Kx^2}$　　　　＊ $e^{c'}=0.4$ のとき $c'\fallingdotseq-0.15$

今 $K=-2$, $c'=-0.15$＊

の時を → $\varphi(x)=0.4e^{-x^2}$

← e^{-x^2} のグラフを 0.4倍したもの。

$f(x)=y=e^{-x^2}$; y軸について対称。

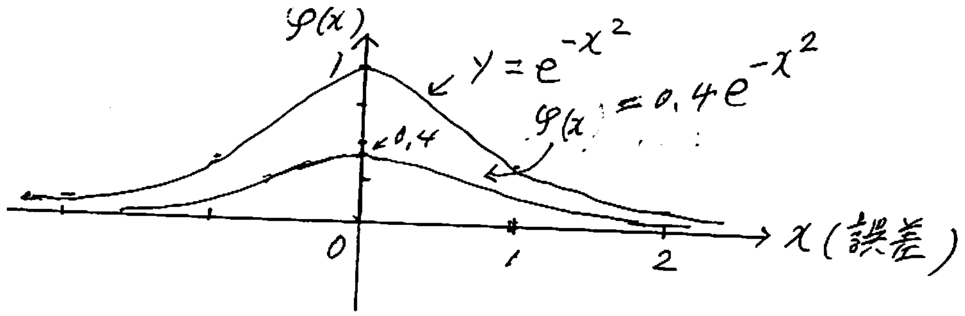
$x\geqq0$ の部分を。 $y'=-2xe^{-x^2}$, $y'=0\to x=0$

x		0	
y'	+	0	−
y	↗	極大	↘

$f(0)=1$, $f(1)=\frac{1}{e}\fallingdotseq0.37$

$f(2)=e^{-4}=\frac{1}{e^4}\fallingdotseq\frac{1}{54.76}\fallingdotseq0.02$

$\lim_{x\to\infty}e^{-x^2}=0$



(2) $\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2}=\sqrt{\pi}$ を示せ。

(準備1) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,dx$ を求めよ。$(n=0,1,2\cdots)$

$I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-1}x\cdot\underset{(-\cos x)'}{\sin x}\,dx$ ＊

部分積分法の公式 $\int f(x)g'(x)dx=f(x)g(x)$

$-\int f'(x)g(x)dx$ より

$*=\underbrace{\left[-\sin^{n-1}x\cdot\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}}_{=0}+(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-2}x\cdot\cos^2x\,dx$

$=(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-2}x(1-\sin^2x)dx$

$$= (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n$$

$\therefore I_n = (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n$ より

$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2} \quad (n \geqq 2)$$

$I_0 = \frac{\pi}{2}$, $I_1 = 1$ より

$$I_{2n} = \frac{2n-1}{2n} I_{2n-2}$$

$$= \frac{2n-1}{2n} \cdot \frac{2n-3}{(2n-2)} I_{2n-4}$$

$$= \cdots\cdots = \frac{(2n-1)(2n-3)\cdots\cdots 1}{2n(2n-2)(2n-4)\cdots 2} I_0$$

$$= \frac{(2n-1)(2n-3)\cdots 5 \cdot 3 \cdot 1}{2n(2n-2)\cdots\cdots 6 \cdot 4 \cdot 2} \cdot \frac{\pi}{2}$$

同様にして $I_{2n+1} = \dfrac{2n(2n-2)\cdots\cdots 4 \cdot 2}{(2n+1)(2n-1)\cdots 5 \cdot 3 \cdot 1}$ Δ

（準備2） $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} x\, dx < \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} x\, dx < \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n-1} dx$

を利用して $\lim_{n \to \infty} \dfrac{2^{2n}(n!)^2}{\sqrt{n}\,(2n)!} = \sqrt{\pi}$ を導け。

（ワリス*の公式）

証） $0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}$ では $0 \leqq \sin x \leqq 1$ より

$\sin^{2n+1} x \leqq \sin^{2n} x \leqq \sin^{2n-1}$ より

上記の不等式が成り立つ

準備1より

*ウォリス Wallis とあるので、ウォリス（英 1616〜1703）のことと思います。

$$\frac{2 \cdot 4 \cdots (2n)}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n+1)} < \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdots\cdots (2n)} \cdot \frac{\pi}{2} < \frac{2 \cdot 4 \cdots (2n-2)}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}$$

各項に $\times \dfrac{2 \cdot 4 \cdots (2n-2)(2n)}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}$ をすると

$$\left\{ \frac{2 \cdot 4 \cdots (2n)}{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)} \right\}^2 \times \frac{1}{2n+1} < \frac{\pi}{2} < \left\{ \frac{2 \cdot 4 \cdots (2n-2)}{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)} \right\}^2 \times 2n$$

さらに各項に $\times\left\{\dfrac{1\cdot3\cdots(2n-1)}{2\cdot4\cdots(2n)}\right\}^2$ をすると

$$\frac{1}{2n+1} < \frac{\pi}{2\left\{\dfrac{2\cdot4\cdots(2n)}{1\cdot3\cdots(2n-1)^2}\right\}^2} < \frac{1}{2n}$$

各項に $\times 2n$

$$\frac{2n}{2n+1} < \frac{\pi}{\left\{\dfrac{2\cdot4\cdots(2n)}{1\cdot3\cdots(2n-1)}\right\}^2\times\dfrac{1}{n}} < 1$$

$n\to\infty$ にすると $\dfrac{2n}{2n+1}\to 1$ より

$$\frac{\pi}{\left\{\dfrac{2\cdot4\cdots(2n)}{1\cdot3\cdots(2n-1)}\right\}^2\times\dfrac{1}{n}} \to 1$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\left\{\frac{2\cdot4\cdots(2n)}{1\cdot3\cdots(2n-1)}\right\}^2\times\frac{1}{n} = \pi$$

$$\to \lim_{n\to\infty}\frac{2\cdot4\cdots(2n)}{1\cdot3\cdots(2n-1)}\cdot\frac{1}{\sqrt{n}} = \sqrt{\pi}$$

→分母,子に $2\cdot4\cdots(2n-2)\cdot2n$ をかけると

$$\to \lim_{n\to\infty}\frac{2^{2n}\cdot(n!)^2}{(2n)!\sqrt{n}} = \sqrt{\pi} \quad //$$

◎本題 $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} = \sqrt{\pi}$ にもどる。

証) e^{-x^2} は偶関数より $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-x^2} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ を示す。

そして $\displaystyle\lim_{R\to\infty}\int_0^R e^{-x^2}dx$ として考える。

(注1)

まず $1-x^2 \leqq e^{-x^2} \leqq \dfrac{1}{1+x^2}$ $(x\geqq 0)$ がいえる。

各辺を n 乗して

(注2)

$$(1-x^2)^n \leqq e^{-nx^2} \leqq \frac{1}{(1+x^2)^n} \quad (0\leqq x\leqq 1)$$

ここで $R=\sqrt{n}$ とくと

$$\int_0^{\sqrt{n}} e^{-x^2}dx = \sqrt{n}\int_0^1 e^{-nt^2}dt$$

$(\because$ $x=\sqrt{n}\,t$ とおくと $dx=\sqrt{n}\,dt$, $\begin{array}{c|c} x & 0\to\sqrt{n} \\ \hline t & 0\to 1 \end{array}$ より$)$

$$\geqq \sqrt{n}\int_0^1 (1-t^2)^n dt$$

$t=\cos\theta$ とおくと $\overset{\shortparallel}{\sqrt{n}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n}\theta\sin d\theta$

$$= \sqrt{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1}\theta\, d\theta \qquad (\because dt = -\sin\theta d\theta)$$

$$\therefore \int_0^{\sqrt{n}} e^{-x^2}dx \geqq \sqrt{n}\cdot\frac{2\cdot4\cdots(2n)}{1\cdot3\cdots(2n+1)} \quad ①$$

一方 $\int_0^{\sqrt{n}} e^{-x^2}dx = \sqrt{n}\int_0^1 e^{-nt^2}dt$ $(x=\sqrt{n}\,t$ とおいて$)$

$$\leqq \sqrt{n}\int_0^1 \frac{1}{(1+t^2)^n}dt < \sqrt{n}\int_0^\infty \frac{1}{(1+t^2)^n}dt$$

$$= \sqrt{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n}\theta\cdot\frac{1}{\sin^2\theta}d\theta \qquad \left(t=\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\ (=\cot\theta)\right.$$

$\left(\begin{array}{c|c} t & 0\to\infty \\ \hline \theta & \frac{\pi}{2}\to 0 \end{array}\right)$ とおいて

$$= \sqrt{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n-2}\theta\, d\theta \qquad \left. dt=\frac{-1}{\sin^2\theta}d\theta\right)$$

$$= \sqrt{n}\cdot\frac{1\cdot3\cdots(2n-3)}{2\cdot4\cdots(2n-2)}\cdot\frac{\pi}{2} \quad ②$$

① ② より $\sqrt{n}\cdot\frac{2\cdot4\cdots(2n)}{1\cdot3\cdots(2n+1)} \leqq \int_0^{\sqrt{n}} e^{-x^2}dx$

$$< \sqrt{n}\cdot\frac{1\cdot3\cdots(2n-3)}{2\cdot4\cdots(2n-2)}\cdot\frac{\pi}{2}$$

$$\therefore \frac{n}{2n+1}\cdot\left\{\frac{2\cdot4\cdots(2n)}{1\cdot3\cdots(2n-1)}\cdot\frac{1}{\sqrt{n}}\right\} \leqq \int_0^{\sqrt{n}} e^{-x^2}dx$$

$$\leqq \frac{1}{\left\{\frac{2\cdot4\cdots(2n-2)}{1\cdot3\cdots(2n-3)}\cdot\frac{1}{\sqrt{n-1}}\right\}}\cdot\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n-1}}\cdot\frac{\pi}{2}$$

③

ワリスの公式より　　　　　　　　　　　　　＊レポート P15 ワリスの公式の1つ前の式より

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2\cdot4\cdots(2n)}{1\cdot3\cdots(2n-1)}\cdot\frac{1}{\sqrt{n}}=\sqrt{\pi}^{\,*} \text{ より}$$

$n\to\infty$ とすると

$$\frac{1}{2}\cdot\sqrt{\pi}\leqq\int_0^\infty e^{-x^2}dx\leqq\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

$$\therefore\int_0^\infty e^{-x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

$$\therefore\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2}dx=\sqrt{\pi}\ //$$

$\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{2n-1}=1$ より

(注) $\lim_{n\to\infty}A\cdot B=\lim_{n\to\infty}A\cdot\lim_{n\to\infty}B$ を③の左の項で。また $\lim_{n\to\infty}\frac{2\cdot4\cdots(2n)}{1\cdot3\cdots(2n-1)}\cdot\frac{1}{\sqrt{n}}\to$

$\to=\lim_{n\to\infty}\frac{2\cdot4\cdots(2n-2)}{1\cdot3\cdots(2n-3)}\cdot\frac{1}{\sqrt{n}}$、　$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n-1}}$ より③の右の項で。

(注1)　$1-x^2\leqq e^{-x^2}\leqq\frac{1}{1+x^2}$　$(x\geqq0)$ について

グラフをかくと

$x=0$ のとき　3つ共 1

$x=\frac{1}{2}$ のとき　$1-x^2=\frac{3}{4}$、　$e^{-\frac{1}{4}}=\frac{1}{e^{\frac{1}{4}}}$

$\frac{1}{1+x^2}=\frac{4}{5}$

$p=e^{\frac{1}{4}}\to\log p=\frac{1}{4}\log_{10}e\fallingdotseq0.1087$

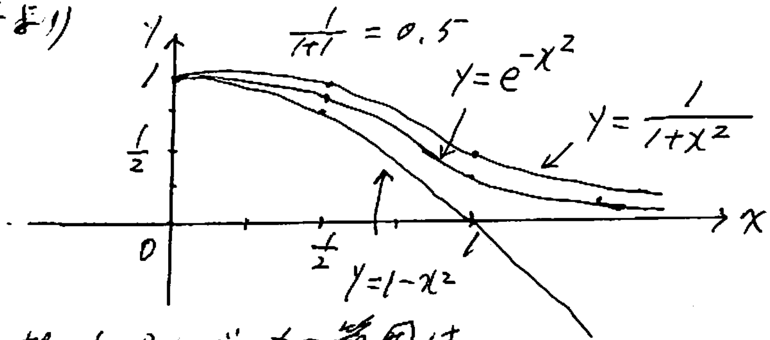
$p\fallingdotseq1.28$、$\frac{1}{1.28}\fallingdotseq0.78$

$x=1$ のとき　$1-x^2=0$、

$e^{-1}=\frac{1}{e}\fallingdotseq0.37$

$\frac{1}{1+1}=0.5$

以上より



(注2)　レポート P15 で t の範囲は

$0\leqq t\leqq1$　この時 t と x は実質的には同じより、$0\leqq x\leqq1$

なお $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} = \sqrt{\pi}$ の証明は、

「数学解法事典」（旺文社、1969刊）を（数I、II、III）参照しました。付録－高校数学の発展の所を。

＜おわりに＞

正規分布の式をどう導くかは、高校統計教育の問題点の1つとされています。上記2つの本の主旨に沿って、表現をかえたり、内容を追加しました。

データより誤差の法則（理想的な形にして）にもとづくものは、実感が伴い、たとえ長くなってもついていけます。　小倉先生のは生徒に紹介でき、数学ができる生徒には、岩田、矢野先生のを紹介できるのでは。ここには高校数学の微分法の知識がよく使用されています。対数の威力も感じます。$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}$ の証明におけるおきかえ（$R = \sqrt{n}$、$x = \sqrt{n}t$ 等）は、仲々気がつきません。レポートP8の $k<0$ の理由は、私なりに考えました。ご検討下さい。

戦後（1945年～）の統計の本で、誤差の法則から証明しているのは、あるでしょうか。

よりわかり易くと試みたもの（例えば「二項分布から正規分布へ」（田島一郎　数学セミナー1974年3月号　後に数学セミナーリーディングス1979年刊に所収））がありますが、数式中心です。他は「すごい」計算がです。数学に通じている人は、それが自然に入ってくるかも知れませんが、私にはついていけませんでした。

（2010．9．6記）