□ 正規分布の式 $y=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$ を いかに導くか

<関数協 秋の研究大会>
(2010. 11/20.21 上田市)

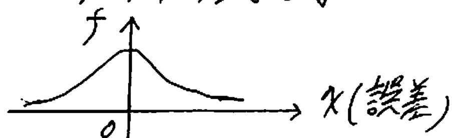
飯島光治(埼玉)

はじめに　統計で、最重要な式の1つでありながら これを導くには、計算上大変なので、ふつう与えてしまいます。

ここでは 共に戦前の本より、誤差の法則よりスタートしているので、実感が伴い、わかり易くなっていると思います。特に小倉先生のは生徒に紹介できると。半田、矢野先生のはより数学的です。微分法の知識を活用していて、微分法のまとめとして 3年生には 紹介できそうです。

1 「統計的研究法」より
(小倉金之助　積善館　1925刊)

実例*により、グラフにかくと y軸を中心とした山型の対称形になる例が示され このグラフの式を求めていこうと。



* 実例(1)　イギリスのグリーニッチ天文台で、ある1つの観測を1000回行なった時、時間(秒)について、次の誤差(測定値−平均値)を得た。

誤差(秒)	度数	誤差	度数
(−3.75)〜(−3.25)	4	(−2.25)〜(−1.75)	46
(−3.25)〜(−2.75)	10	(−1.75)〜(−1.25)	82
(−2.75)〜(−2.25)	22	(−1.25)〜(−0.75)	121

誤差	度数	誤差	度数
(-0.75)〜(-0.25)	152	1.25〜1.75	72
(-0.25)〜(0.25)	163	1.75〜2.25	40
0.25〜0.75	147	2.25〜2.75	19
0.75〜1.25	112	2.75〜3.25	10
		計	1000

実例(2)　アメリカで行なったある1つの三角測量で，角の誤差(秒)の分布

誤差	度数	誤差	度数
(-6")〜(-5")	1	0"〜1"	26
(-5")〜(-4")	2	1"〜2"	17
(-4")〜(-3")	2	2"〜3"	8
(-3")〜(-2")	3	3"〜4"	2
(-2")〜(-1")	13	4"〜5"	0
(-1")〜0"	26	計	100

ここで実験式として，$y = A \cdot B^{-x^2}$ ($A>0$, $B>1$として) を考える。本では具体例として $y = 2^{-x^2}$ ($A=1, B=2$) $y = 1.5 \times 3^{-x^2}$ を xに主な値を与え，yを計算して点にとり，グラフをかくと，それぞれy軸を中心とした山型の対称形になる。

次にデータとしてイギリス人の成人の身長8585人の。(1883年，明治16年)

高さ(インチ)	人数	高さ(インチ)	人数
57―	2	66―	1223
58―	4	67―	1329
59―	14	68―	1230
60―	41	69―	1063
61―	83	70―	646
62―	169	71―	392
63―	394	72―	202
64―	669	73―	79
65―	990		

(注) インチ ≒ 2.5 cm　たとえば 67インチ ≒ 167.5 cm

高さ	人数
74—	32
75—	16
76—	5
77—	2
	計 8585(人)

このデータより
平均 $M = 67.46$
$\fallingdotseq 67.5$ インチとして
標準偏差 $\sigma = 2.57$ インチ，
$\sigma^2 = 6.6049$
$\fallingdotseq 6.6$ として以下用いる。

フサイ 〈上記の誤差の表〉

ξ	f	ξ	f
0	1330	±6	80
±1	1225	±7	37
±2	1025	±8	15
±3	660	±9	5
±4	390	±10	2
±5	185	計	4954

cf $8585 \div 2 = 4292.5$

(注) $\xi = X$(高さ) $- M$(平均値)。
なお小倉先生の本では
$\pm 1 \to 1220$(人) となっていますが
表より $(1223+1230)\div 2$
$= 1226.5 \to 1225$
とした。以下数字を変えた所が。

次に $f = A \cdot B^{-\xi^2}$ として。 $\xi = 0$ のとき 表より $f = 1330$
$\to A = 1330$

ここで誤差の法則として，測定の誤差は小さい方が多く，大きい誤差は少ないがあるので，回数Nを増やすと，Aはふえ，σは小さくなる $\to$ AはNに比例して，σに反比例すると仮定してみる。

i.e.(即ち) $A = \dfrac{KN}{\sigma}$ (K:定数)とおく。$\to K = \dfrac{A\sigma}{N}$。

$$K = \frac{1330 \times 2.67}{8585} = 0.398 \fallingdotseq 0.4$$

$$A \fallingdotseq \frac{0.4N}{\sigma}$$

次に Bの値。
ここで ξの代わりに $\dfrac{\xi}{\sigma}$ (標準測定値という)とする

(この本の前の所で 2つのデータを比較の時，単位が違う時，$\dfrac{\xi}{\sigma}$にすると，無名数となり，単位の違いが，無視できる。とあります。)

$f = A \cdot B^{-\xi^2} = A\,(B^{\sigma^2})^{-(\frac{\xi}{\sigma})^2}$ とする。 $C = B^{\sigma^2}$ とおくと

$f = A \cdot C^{-(\frac{\xi}{\sigma})^2} \rightarrow \log f = \log A - (\frac{\xi}{\sigma})^2 \log C$ ①

$\frac{0.4N}{\sigma}$ 〃

$\rightarrow \log C = (\frac{\sigma}{\xi})^2 (\log A - \log f)$

。 $\xi = \pm 1$ のとき　$6.6\,(\log 1330 - \log 1225) \fallingdotseq 0.25$

($\fallingdotseq \sigma^2$)

。 $\xi = \pm 2$ のとき　$\frac{6.6}{4 \,〃\, \xi^2}\,(\log 1330 - \log 1025) \fallingdotseq 0.19$

以下

$\xi = \pm 3 \rightarrow 0.22$
〃 $\pm 4 \rightarrow 0.22$
〃 $\pm 5 \rightarrow 0.23$
〃 $\pm 6 \rightarrow 0.22$

$\xi = \pm 7 \rightarrow 0.21$
〃 $\pm 8 \rightarrow 0.20$
〃 $\pm 9 \rightarrow 0.20$
〃 $\pm 10 \rightarrow 0.19$

となるので　$\xi = \pm 1 \sim \xi = \pm 10$ の平均 $= 0.213$

$\therefore \log C = 0.213 \rightarrow C = 10^{0.213}$

上記の①に代入して　$f = \frac{0.4N}{\sigma} \cdot 10^{-0.213(\frac{\xi}{\sigma})^2}$

$= \frac{0.4N}{\sigma} \cdot (10^{0.426})^{-\frac{1}{2}(\frac{\xi}{\sigma})^2}$

($a = 10^{0.426}$ とおくと $\log a = 0.426$
$\rightarrow a \fallingdotseq 2.67$)

$f = \frac{0.4N}{\sigma}\,(2.67)^{-\frac{1}{2}(\frac{\xi}{\sigma})^2}$

ここで $0.4 = \frac{4}{10} = \frac{1}{2.5} = \frac{1}{\sqrt{6.25}}$ とすると

$f = \frac{N}{\sqrt{6.25}\,\sigma} \cdot (2.67)^{-\frac{1}{2}(\frac{\xi}{\sigma})^2}$

今まで近似してきているので、正確には

$f = \frac{N}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \cdot e^{-\frac{1}{2}(\frac{\xi}{\sigma})^2}$ ②　と知られている。

さらに $y = \frac{f\sigma}{N}$ ($\rightarrow f = y \cdot \frac{N}{\sigma}$),　($2\pi = 6.2832\cdots$
$e = 2.7183\cdots$)

$x = \frac{\xi}{\sigma}$ とおくと　②は　$y = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2}$ ③

となる。

＊ Nを十分多くすれば、以上の近似の式は ＝(イコール)に代わると考えられる。

この方法は ③の1歩手前まできています。

2 「統計法とその教育上の応用」より
（半田正吉，矢野建治　共立出版　1944刊）

“1809年、ガウス（独1777〜1855）の研究した方法で誤差法則を示す方程式を導入する事にする。”とあります。

。誤差には，定誤差，過失による誤差，偶然による誤差とあり，前2つは防げると。今後偶然による誤差を扱う。
また　$x_K = X_K - g$（X_K 測定値，g 真の値）を真の誤差，$x_K = X_K - M$（Mは最確値，ふつう平均値を）をみかけの誤差という。gの値は得られないと。

。誤差の法則；各種のデータより，偶然による誤差では
(1) 誤差の小さい方が，大きい誤差より多くおこる。
(2) 誤差の分布は，対称的である。即ち同じ大きさの正の誤差と負の誤差とは同じ。
(3) 余り大きい誤差は，おこらない。

。今測定値X_K ($K=1,2,\cdots,N$)，真の値gとして誤差をx_K ($x_K = X_K - g$，$K=1,2,\cdots N$)。誤差のおこる確率をP_K ($K=1,2,\cdots,N$)とする。ここで確率とは，x_Kを含むある小範囲内の誤差のおこる確率のこと。また1回のみの測定は，考えない。
すると P_Kは x_Kの関数より $P = \varphi(x)$（ファイ）とおける。
i.e.（即ち）$P_1 = \varphi(x_1)$，$P_2 = \varphi(x_2)$，$\cdots$，$P_N = \varphi(x_N)$
ここで gの値は知ることができないので，色々な値を試みる。即ちgを変数として考えると，x_Kはgの関数で，$P = \varphi(x)$は，gの合成関数となる。
$\varphi(x)$の形は，誤差の法則をみたす最も自然な形，即ち試みの系列の誤差$x_1, x_2, \cdots, x_N$の

全体的にみておこる確率が最もおこり易い場合
(＝最大のとき)に生じると考える。

ここで $x_1, x_2, \cdots, x_N$ は同時にはおこらないが、同時におこると考えてよい。また偶然によるなので各 x_k は、独立より、全体的にみた確率 P は、

$$P = P_1 \cdot P_2 \cdots\cdots P_N = \varphi(x_1)\,\varphi(x_2)\cdots\cdots\varphi(x_N) \quad \text{(A)}$$

が最大となるような $\varphi(x)$ の形を求めることに。

結論を先にのべると

『 P の値を最大にする $\varphi(x)$ は

$\varphi(x) = c e^{-h^2 x^2}$ の形になる

(c, h は正の定数、e は自然対数) 』

(証明)……

P は唯1つの極大をもち、極小はないものとすると

P が最大 $\Longleftrightarrow \dfrac{dP}{dq} = 0$ ①

(A)の両辺に底を e とする対数をとる。(積→和に)

次に両辺を q について微分する。(合成関数の微分法)

$$\frac{1}{P}\frac{dP}{dq} = \frac{d}{dx_1}[\log\varphi(x_1)]\frac{dx_1}{dq} + \frac{d}{dx_2}[\log\varphi(x_2)]\frac{dx_2}{dq} + \cdots + \frac{d}{dx_N}[\log\varphi(x_N)]\frac{dx_N}{dq}$$

ここで $x_k = X_k - q$ より $\dfrac{dx_k}{dq} = -1$

$\overset{\text{プサイ}}{\psi}(x) = \dfrac{d}{dx}[\log\varphi(x)]$ とおくと

①より $\psi(x_1) + \psi(x_2) + \cdots + \psi(x_N) = 0$ ②

また N が十分大きければ誤差の法則(2)より

$x_1 + x_2 + \cdots\cdots + x_N = 0$ ③

次に しばらく $x_1, x_2, \cdots, x_N$ を定数とする。

（今までは変数）

今 Nコの誤差中の任意の２つ x_r, x_s を取り

x_r, x_s のかわりに $x_r' = x_r + \varepsilon$, $x_s' = x_s - \varepsilon$ とおくと

（ε は極めて絶対値の小さな数）

$x_1, x_2, \cdots, x_r', \cdots, x_s', \cdots, x_N$（$x_r, x_s$ は除外）

は P6の③の関係をみたすから、誤差の1系列とみなせるから（ここで $x_1, x_2, \cdots, x_N$ は変数として）

$$\psi(x_1) + \psi(x_2) + \cdots + \psi(x_r') + \cdots + \psi(x_s') + \cdots + \psi(x_N) = 0 \quad ④$$

をみたす。

② − ④ $\psi(x_r) + \psi(x_s) - \psi(x_r') - \psi(x_s') = 0$

$$\rightarrow \psi(x_r) + \psi(x_s) = \psi(x_r') + \psi(x_s')$$

$$= \psi(x_r + \varepsilon) + \psi(x_s - \varepsilon)$$

$$\therefore \frac{\psi(x_r + \varepsilon) - \psi(x_r)}{\varepsilon} = \frac{\psi(x_s - \varepsilon) - \psi(x_s)}{-\varepsilon}$$

$\varepsilon \rightarrow 0$ とすると $\left[\frac{d}{dx}\psi(x)\right]_{x=x_r} = \left[\frac{d}{dx}\psi(x)\right]_{x=x_s}$

x_r, x_s は x_k ($k = 1, 2, \cdots, N$) 中の任意の２つより

結局 $\rightarrow$ $\left[\frac{d}{dx}\psi(x)\right]_{x=x_1} = \left[\frac{d}{dx}\psi(x)\right]_{x=x_2} = \cdots = \left[\frac{d}{dx}\psi(x)\right]_{x=x_N}$

（ここで $x_1, x_2 \cdots, x_N$ は定数）

$\psi(x)$ の導関数は一定。 ここで $x_1, x_2, \cdots, x_N$ は誤差の系列の任意の1つと考えてよいから $\psi(x)$ の導関数の値は、x のすべての値について一定。

$\rightarrow \frac{d}{dx}\psi(x) = k$ （k：定数）$\rightarrow \psi(x) = kx + c'$ （c' は定数）

これを P6の②に代入すると

$$k(\underbrace{x_1 + x_2 + \cdots + x_N}_{=0}) + Nc' = 0 \text{ より } c' = 0$$

$$\therefore \psi(x) = kx \rightarrow \frac{d}{dx}[\log \varphi(x)] = kx$$

$\rightarrow \log \varphi(x) = \frac{1}{2}kx^2 + c''$ （c'' は定数）、底は e より

$$\rightarrow \varphi(x) = e^{\frac{1}{2}kx^2 + c''} \quad ⑤$$

ここで誤差の法則より、小さな誤差は、大きな誤差より多くおこるから $K<0$。(なぜかは補記に) $\frac{1}{2}K=-h^2$ ($h>0$*) とおく。

また $e^{C''}=C$ とおくと $C>0$ で、P7の⑤は

$$\varphi(x)=ce^{-h^2x^2}$$ の形になる。//

(* なぜ $h>0$ かは、このレポート P9 で $hx=t$ とおくが $h>0$ のとき $x:-\infty\to\infty$ のとき t も $-\infty\to\infty$ となり、都合良いからではないか。また $\int_{-\infty}^{\infty}ce^{-h^2x^2}dx>0$ より $h>0$ が。)

次は c と h の形を定めることに。

今後は、$x_K=X_K-\xi$ のかわりに、みかけの誤差 $x_K=X_K-M$ で考える。N を十分多くすれば $\varphi(x)=ce^{-h^2x^2}$ の形はかわらないとする。

さて ある量の N コの測定値を、区分の大きさが Δ の等しい階級に分けたとして、それらの階級の中央値を $X_1, X_2, \cdots, X_n$。度数を $f_1, f_2, \cdots, f_n$ ($\sum f_K=N$) とする。

誤差 ξ は、$\xi_1=X_1-M,\ \xi_2=X_2-M,\ \cdots,\ \xi_n=X_n-M$

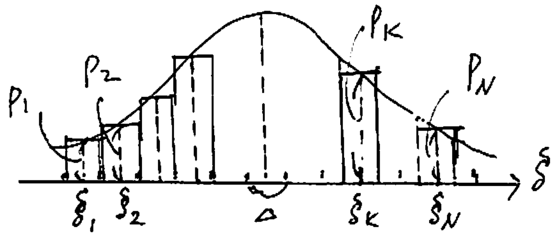
そして ξ_K (クサイ) の $\xi_K-\frac{\Delta}{2}$, $\xi_K+\frac{\Delta}{2}$ での確率を $\frac{f_K}{N}$ と考える。

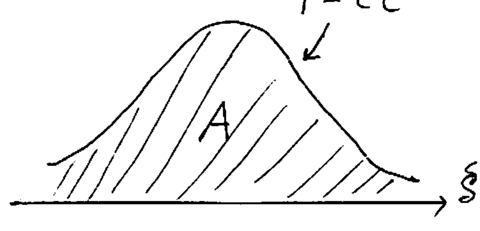
i.e. $p_1=\frac{f_1}{N},\ p_2=\frac{f_2}{N},\ \cdots,\ p_n=\frac{f_n}{N}$ ① ($f_K\neq 0$ 従って $p_K\neq 0$ とする。)

$$p_K=ce^{-h^2\xi_K^2}$$ ② ($K=1,2,\cdots,n$) が成りたつとする。

ここで①より $\sum p_K=1 \to \sum p_K=\sum ce^{-h^2\xi_K^2}=1$

また $\frac{1}{\Delta}\sum p_K\Delta=1$ とかける。





$\sum P_K \Delta$は、左図のヒストグラムの面積。ここで$\Delta \to 0$とすると極限は、面積Aに等しくなる。

$e^{h^2} = B$とおくと yは y軸を中心とした山型の対称形と考えられる。cf 小倉先生の例。

ここで $\underline{A = \int_{-\infty}^{\infty} c e^{-h^2 \delta^2} d\delta = \frac{c\sqrt{\pi}}{h}}$ がいえる。

($\because$ 今 $\delta \to x$ にかえると $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$ がいえ(証明は補記に)、$\underline{hx = t}$ $(h>0)$ とおくと。)

すると $\sum P_K \Delta \fallingdotseq \frac{c\sqrt{\pi}}{h}$ (Δは微小)

これを $\frac{1}{\Delta} \sum P_K \Delta = 1$ に代入すると $\therefore \underline{c \fallingdotseq \frac{h\Delta}{\sqrt{\pi}}}$

$n \to \infty$ にすると

$$\underline{P_K = \frac{h\Delta}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 \delta_K^2}} \quad \left(\begin{matrix} K=1,2, \\ \cdots n \end{matrix}\right) \quad (A)$$

次に$\underline{h\text{を定める}}$。

今δ_1なるf_1コの誤差、δ_2なるf_2コの誤差、…、δ_nなるf_nコの誤差が同時におこる確率Pは、

$$P = (\underbrace{P_1 P_1 \cdots P_1}_{f_1\text{コ}})(\underbrace{P_2 P_2 \cdots P_2}_{f_2\text{コ}}) \cdots (\underbrace{P_n \cdots P_n}_{f_n\text{コ}})$$

$= P_1^{f_1} P_2^{f_2} \cdots P_n^{f_n}$、上記の(A)を代入

$= \cancel{\qquad\qquad}$

$= \left(\frac{h\Delta}{\sqrt{\pi}}\right)^N e^{-h^2 \sum f_K \delta_K^2} = \underline{\left(\frac{\Delta}{\sqrt{\pi}}\right)^N \cdot h^N \cdot e^{-h^2 N \sigma^2}}$

$\left(\sigma = \sqrt{\frac{1}{N} \sum f_K \delta_K^2}\right)$

ここでhは、Pが最大になるようなh $\Longleftrightarrow \frac{dP}{dh} = 0$

$\frac{dP}{dh}$をおめると(積の微分法)結局 $1 - 2h^2\sigma^2 = 0$

$\to h>0$より $\underline{h = \frac{1}{\sqrt{2}\sigma}}$

上記のcとこのhより

$$\underline{P = \frac{\Delta}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\delta}{\sigma}\right)^2}} \quad (P_K, \delta_K \text{のKを除いて})$$

$p = \frac{f}{N}$ とおくと $f = \frac{N\Delta}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\xi}{\sigma}\right)^2}$ (B)

さらに $y = \frac{f\sigma}{N\Delta}$ $\left(\to f = \frac{yN\Delta}{\sigma}\right)$, $x = \frac{\xi}{\sigma}$ とおくと

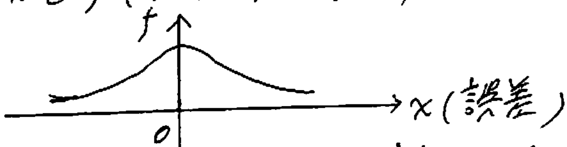
(B)は $\quad y = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}$

以上で 近似の式は、Nを十分多くとると ($N \to \infty$)、等式(=)になると考えられる。

<補記>

(1) レポートP8 ↓2行目の $k<0$ はなぜ?

このとき xとf (従って $p = \varphi(x)$) のグラフは



より $x \geqq 0$ でfは単調減少, $x \leqq 0$ でfは単調増加

$\varphi(x) = e^{\frac{1}{2}kx^2 + C''} \to \varphi'(x) = kx\, e^{\frac{1}{2}kx^2 + C''}$

1) $x \geqq 0$ のとき $\varphi(x)$は単調減少より $\varphi'(x) < 0$

∴ $k < 0$

2) $x \leqq 0$ のとき $\varphi(x)$は単調増加より $\varphi'(x) > 0$

∴ $k < 0$

1), 2)より $k < 0$。

(2) $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$ について

(準備1) $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\, dx$ ($n = 0, 1, 2 \cdots$) について

結果は、
$$\begin{cases} I_{2n} = \dfrac{(2n-1)(2n-3)\cdots 5\cdot 3\cdot 1}{2n(2n-2)\cdots 6\cdot 4\cdot 2} \cdot \underbrace{\dfrac{\pi}{2}}_{=I_0} \\[2ex] I_{2n+1} = \dfrac{2n(2n-2)\cdots 4\cdot 2}{(2n+1)(2n-1)\cdots 5\cdot 3\cdot 1} \end{cases}$$

$(\sin x)^0 = 1$, $\int_0^{\frac{\pi}{2}} 1\, dx = \frac{\pi}{2}$

ここから $\begin{cases} I_{2n-1}, \\ I_{2n-2} \end{cases}$ もでる。

(準備2) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} x\,dx < \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} x\,dx < \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n-1} dx$

を利用して $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{2^{2n}(n!)^2}{\sqrt{n}\,(2n)!} = \sqrt{\pi}$ が成り立つ。

(ウオリスの公式)
(英 1616〜1703)

(証明の方針) 積分不等式は、$0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{2} \to 0 \leqq \sin x \leqq 1$ より。
準備より、上記の不等式は

$$\frac{2\cdot4\cdots(2n)}{1\cdot3\cdot5\cdots(2n+1)} < \frac{1\cdot3\cdots(2n-1)}{2\cdot4\cdots(2n)}\cdot\frac{\pi}{2} < \frac{2\cdot4\cdots(2n-2)}{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)}$$

1) 各項に $\times \dfrac{2\cdot4\cdots(2n)}{1\cdot3\cdots(2n-1)}$

2) さらに各項に $\times \left\{\dfrac{1\cdot3\cdots(2n-1)}{2\cdot4\cdots(2n)}\right\}^2$

3) 各項に $\times 2n$

$$\frac{2n}{2n+1} < \frac{\pi}{\left\{\frac{2\cdot4\cdots(2n)}{1\cdot3\cdots(2n-1)}\right\}^2 \times \frac{1}{n}} < 1$$

$n\to\infty$ にすると $\dfrac{2n}{2n+1} \to 1$ より、まん中の項 $\to 1$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\left\{\frac{2\cdot4\cdots(2n)}{1\cdot3\cdots(2n-1)}\right\}^2 \times \frac{1}{n} = \pi$$

$$\to \lim_{n\to\infty}\frac{2\cdot4\cdots(2n)}{1\cdot3\cdots(2n-1)} \times \frac{1}{\sqrt{n}} = \sqrt{\pi}$$

分母、子に $2\cdot4\cdots(2n)$ をかけると
ウォリスの公式がえられる。

◎ $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}$ について

証) e^{-x^2} は、偶関数より $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ を示せばよい。
これて $\displaystyle\lim_{R\to\infty}\int_0^R e^{-x^2}dx$ として考える。

まず $1-x^2 \leqq e^{-x^2} \leqq \dfrac{1}{1+x^2}$ $(x \geqq 0)$ がいえる。* * $x \geqq 0$ で考えている。

($\because$ $x \geqq 0$ で各々のグラフをかくと)

n 乗して $(1-x^2)^n \leqq e^{-nx^2} \leqq \dfrac{1}{(1+x^2)^n}$ $(0 \leqq x \leqq 1)$
($\because$ $\dfrac{1}{1+x^2} \leqq 1$ より)

$R=\sqrt{n}$ として $\displaystyle\int_0^{\sqrt{n}} e^{-x^2}dx = \sqrt{n}\int_0^1 e^{-nt^2}dt$ （∵ $x=\sqrt{n}\,t$ とおく）

$$\geqq \sqrt{n}\int_0^1 (1-t^2)^n dt \quad (\rightarrow t=\cos\theta \text{ とおく})$$

$$= \sqrt{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n}\theta\cdot\sin\theta\, d\theta = \sqrt{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n+1}\theta\, d\theta$$

$$\therefore \int_0^{\sqrt{n}} e^{-x^2}dx \geqq \sqrt{n}\cdot\frac{2\cdot4\cdots(2n)}{1\cdot3\cdots(2n+1)} \quad ①$$

一方 $\displaystyle\int_0^{n} e^{-x^2}dx = \sqrt{n}\int_0^1 e^{-nt^2}dt$

$$\leqq \sqrt{n}\int_0^1 \frac{1}{(1+t^2)^n}dt < \sqrt{n}\int_0^\infty \frac{1}{(1+t^2)^n}dt \; *$$

$t=\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}$ とおくと $\displaystyle * = \sqrt{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n}\theta\cdot\frac{1}{\sin^2\theta}\,d\theta$

$\overset{\shortparallel}{\cot\theta}$

$$= \sqrt{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n-2}\theta\, d\theta$$

$$= \sqrt{n}\cdot\frac{1\cdot3\cdots(2n-3)}{2\cdot4\cdots(2n-2)}\cdot\frac{\pi}{2} \quad ②$$

cf

t	$0\to\infty$
θ	$\frac{\pi}{2}\to 0$

$dt = \dfrac{-\sin^2\theta-\cos^2\theta}{\sin^2\theta}d\theta$

$= -\dfrac{1}{\sin^2\theta}d\theta$

① ③ より

$$\sqrt{n}\cdot\frac{2\cdot4\cdots(2n)}{1\cdot3\cdots(2n+1)} \leqq \int_0^{\sqrt{n}} e^{-x^2}dx \leqq \sqrt{n}\cdot\frac{1\cdot3\cdots(2n-3)}{2\cdot4\cdots(2n-2)}\cdot\frac{\pi}{2}$$

$$\rightarrow \frac{n}{2n+1}\left\{\frac{2\cdot4\cdots(2n)}{1\cdot3\cdots(2n-1)}\cdot\frac{1}{\sqrt{n}}\right. \leqq \int_0^{\sqrt{n}} e^{-x^2}dx$$

$$\leqq \frac{1}{\left\{\frac{2\cdot4\cdots(2n-2)}{1\cdot3\cdots(2n-3)}\right\}\cdot\frac{1}{\sqrt{n-1}}}\cdot\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n-1}}\cdot\frac{\pi}{2} \quad ③$$

ウォリスの公式で、公式の1つ前の式より

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2\cdot4\cdots(2n)}{1\cdot3\cdots(2n-1)})\cdot\frac{1}{\sqrt{n}} = \sqrt{\pi} \text{ より}$$

$n\to\infty$ とすると

③は $\displaystyle\frac{1}{2}\cdot\sqrt{\pi} \leqq \int_0^\infty e^{-x^2}dx \leqq \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

↑（$n\to\infty$ のときいえる。）

$$\therefore \int_0^\infty e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

$$\therefore \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi} \quad //$$

* $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}$ の証明について
「数学解法事典」（旺文社 1969刊）を参照しました。

＜おわりに＞

戦後の統計の本で、誤差の法則から導いているのはあるでしょうか。　小倉先生のは教育的ですし、米田、矢野先生のは数学的になっています。もしガウスがこのようにやったら、やはりすごい(!)と思いますし——特に $x_r' = x_r + \varepsilon$, $x_s' = x_s - \varepsilon$ という操作は——。ガウスまでの数学の発展（たとえばウォリスの公式）も。

ガウスの方法は、主に微分法の知識を活用しています。ここで思うのは微積分の計算（指導）は、内容的に重要な式（たとえば $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx$）を、理解できることを主な目標にしたらということです。

ガウスの展開は、長いですが、誤差の法則という前提からスタートしているので私には、ついていける感じます。数式のみの展開では、たとえフォローできても、実感としてピンときません。数式のみで、自然に納得する方も、いると思いますが。

（2010．9月記）