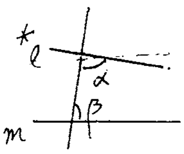
非ユークリッド幾何の成立までを主として

2013.8.17(土)
埼数協 研究大会
(埼玉会館)

飯島光治

はじめに このテーマのきっかけは、関数協ニュース(No129 2013.1月刊)のP9に"かつて小泉首相が自衛隊のイラク派兵について、「自衛隊の行くところは非戦闘地域である」という旨の答弁を行ったときのことです。国会議員は誰もそれを「循環論法!」とは言えず、"とあります。* この場合の循環論法は論点先取りの意味と思いますが、一般には"証明すべき事柄の証明に、その事柄(またはそれをいいかえたもの)を用いている。"となります。私は今まで この循環論法を意識していなかった。そしてユークリッドの第5公準*を証明しようという試みは約2000年間せられてきましたが、多くがこの循環論法だったとあります。第5公準またはそれをいいかえたものがどこに使っているかは注意深くみないと仲々気がつきませんが。(え!ここにもの例が)

*瀬山士郎先生より。

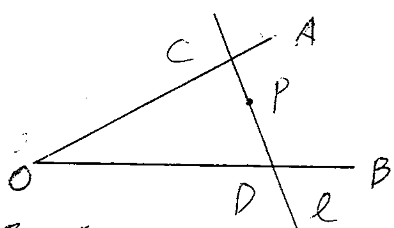


*
$\alpha+\beta<2\angle R$
⇓
lとmは1点で交わる。
(原論命題17の逆)
"3角形のどの2つの角の和も、2∠Rより小さい。"

$\boxed{0}$

はじめに書いたのに関連する例として(注1)

「角AOB内の点Pを通り、辺AO、BOと交わる直線lを引くことができる。」



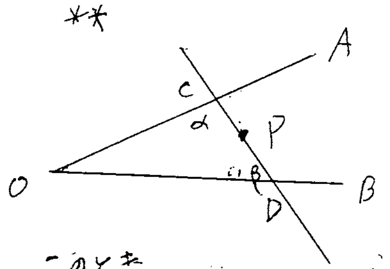
これは第5公準(平行線の公理)と同値とあります。*

1) 第5公準→右図
第5公準と同値の「三角形の内角の和は2直角」より
このとき $\angle OCD+\angle ODC < 2\angle R$ より第5公準 (〃∠R)
を用いてOで交わり上図となる。

2) 右図→第5公準
このとき $\angle OCD+\angle ODC < 2\angle R$** で、OでOA、OBは交わっているので、第5公準になっている。

*アットゥーシー(1201~1274 イラン)による。(「グレイゼルの数学史 III」(大竹出版 1997刊 P88~90) 証)
+ローレンツ(ドイツ 1791年)、ルジャンドル(フランス 1752~1833)

**

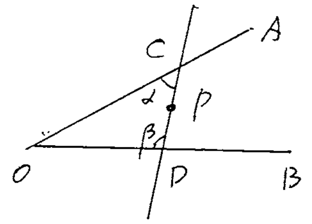


このとき　$\alpha < \angle PDB$ *

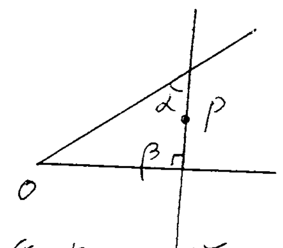
$\beta + \angle PDB = 2\angle R$

より　$\alpha + \beta < 2\angle R$

*外角は、その内対角より大きい（原論命題16）。命題28まで公準5を用いないで証明できる。



左と同様に



一番左と同様に

（証は、飯島による。）

1　第5公準と同値な平行線公理

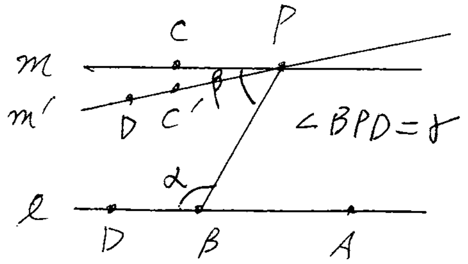
第5公準を証明しようと多くの数学者が挑戦しました。すべて失敗にですが、その副産物に第5公準と同値なものが多く得られました。その1つに以下のものがあり、ジョン・プレーフェア（イギリス 1748〜1819）によります。　（*「幾何物語」P124に）

「直線ℓ外の1点Pを通り、ℓに平行な直線がちょうど1本だけ存在する。」　Ⓐ

ここで存在することは、原論命題31*があり、その証明は第5公準を用いないでできる。1本しかないというのが第5公準と同値に。

*「与えられた点を通って、与えられた直線に平行線を引くこと。」

証）　1）第5公準 → 上の Ⓐ



右図で ℓ//m とする。Pを通って m と異なる直線 m′ を引くと、右図の場合

$\angle C'PB < \angle CPB$ より

$\angle C'PB + \angle DBP < 2\angle R$ * となり、ℓとm′は公準5により交わる。従ってℓとm′は平行ではなく平行線はm 1本しかない。

（** この時 $\alpha+\beta=2\angle R$ のとき m//ℓ（命題28）より $\alpha+\gamma<2\angle R$）

*原論命題29「1つの直線が2つの平行線と交われば錯角は互いに等しく外角は同じ側の内対角に等しく、かつ同じ側の内角の和は2∠Rに等しい」より。この証明に初めて第5公準を用いる。

2）Ⓐ → 第5公準

Pを通る平行線がm 1本しかなければ、mと違う直線m′を引くと、m′とℓは交わるので第5公準は成り立つ。**（→右上に）　（証明は 注2）

2 サッケーリとランベルトの挑戦*

(イタリア 1667~1733)　(ドイツ 1728~1777) スイスに生まれ (スイス系ドイツ)

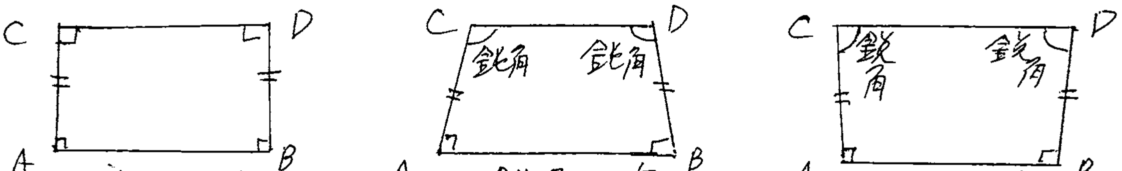
* 成立史において、第2期にあたる。第3期は、ボヤイ、ロバチェフスキー、ガウスの成立に。

サッケーリの頃になると、第5公準の直接証明は無理とわかってきて、この2人は間接証明を試みる。即ち 1) 直角仮定　2) 鈍角仮定　3) 鋭角仮定を設け 1)は第5公準と同値なので、2) 3)を仮定した場合、論理的に矛盾がでるはずとして、否定され、結局 1)が正しいという方針で実施した。

ランベルトは サッケーリより さらに一歩 非ユークリッド幾何に近づいたが、2人とも ユークリッド幾何(その根底にある空間観)は絶対正しいとしている所が限界でした。

* タウリヌス
(ドイツ 1794~1874) も サッケーリと同じようにすすめた。彼はカントの空間論によった。—ユークリッド幾何の空間が唯1つのもの— (ガウスとの手紙のやりとり)

○ サッケーリの仮定



(直角仮定)　(鈍角仮定)　(鋭角仮定)

* サッケーリの四角形は ハイヤームの四角形、ランベルトのは ハイサムの四角形 ともいう。即ちサッケーリ ランベルトが最初に考えたのではない。(「グレイゼルの数学史III」より) (大竹出版 1997刊)

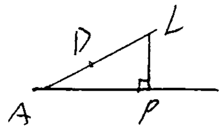
○ ランベルトの仮定；サッケーリの図で∠A, ∠B, ∠Cは直角で∠Dのみが、直角、鈍角、鋭角の場合とした。
(なぜ三角形でなく、四角形で考えたのかは 四角形の方が、平行と相性が良い旨の記述) (注3)

* サッケーリとランベルトの仮定は同値。

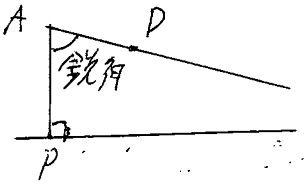
* サッケーリより

以下「平行線」(中沢貞治 共立出版)より。

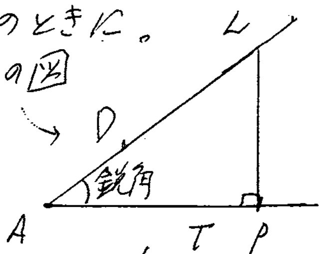
(命題11) 直線APを2つの直線PLとADで切る。1つはPで垂直に、他はAでPLのある側において鋭角になるように。このとき<u>直角仮定</u>のもとでは直線AD, PLは、それらとAPとのなす角の和が2∠Rより小さい側に延長すれば、<u>有限の距離</u>にある1点で交わることになる。(交点をLとした。) (傍線飯島)



<コメント> これは 第5公準で 1角が$\angle R$のときに。



命題11の図



証 の方針)

右図でまず $\underline{AD=DF=DM}$ Ⓐ

をいう。1) $\underline{DM<DF=DA}$と

すると 矛盾すると。 それは

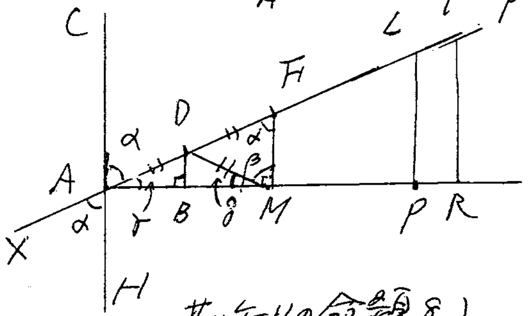
$\triangle DFM$; $\alpha<\beta$ ①(仮定より)

直角の仮定のもとでは *

$\angle DFM=\angle CAD=\angle XAH=\alpha$ (← サッケーリの命題8)

ここで $\alpha+\gamma=\beta+\delta=\angle R$ ②, ①②より $\gamma>\delta$ → $\triangle DAM$で

$DM>DA=DF$ となり 仮定に矛盾。



2) $\underline{DM>DF=DA}$と仮定すると　やはり矛盾　∴ $DM=DF=DA$

このことから ADを2倍, 4倍, 8倍…としていくと AP上でABの2倍,

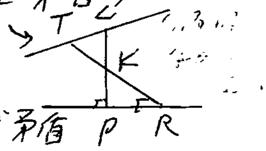
4倍, 8倍, …の距離が切りとられていく。 そこでこの操作より

ADの延長上に点Tをとって TからAPの延長上に垂線TR ($AP<AR$)

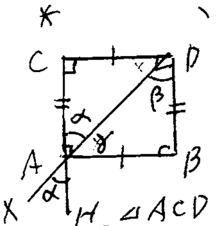
が引けるようにできる。(もし Lの手前で T がくると矛盾)

(RはPの右側に)

従って $\underline{AL<AT}$より ALは有限。



(なぜ矛盾 は$\triangle PKR$は, $2\angle R$より大で)



$\triangle ACD$
このとき $\equiv\triangle ABD$
より $\alpha=\beta$
ここで$\angle DFM$
$=\angle ADB$
(右図で)

*なぜⒶを示したのか。

<コメント> まずⒶを示したのは*、Mの作図 即ちDから
ADに等しく。このとき $AM=2AB$
(しかしこれは 平行と比例の関係からも)

(命題12) 命題11は 鈍角の仮定のもとにも 主張できる。

このときは $AD=DF$のとき $AB<BM$ ③となる。

これがいえれば 命題11の時より もっと早く TRが取れる

ことになる。 では ③の証明は。

まず$\underline{DM\neq DF}$を示す。

もし $DM=DF=DA$ ならば

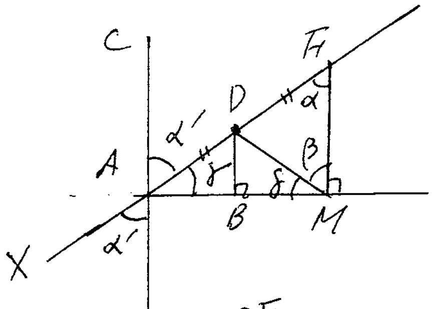
$\alpha=\beta$ 。 鈍角の仮定のもと

では $\alpha'<\alpha$ (サッケーリの命題8*)

より $\alpha'<\alpha=\beta$ ④ このとき

$\alpha'+\gamma=\beta+\delta=\angle R$ ⑤

④⑤から　$\gamma>\delta$ となり $DM=DA$ 即ち$DM=DF$
に反する。



次に $DM \geq D\bar{F}$ を示す。（$D\bar{F}$ の上に「$=AD$」）

もし $DM < D\bar{F} = DA$ ならば

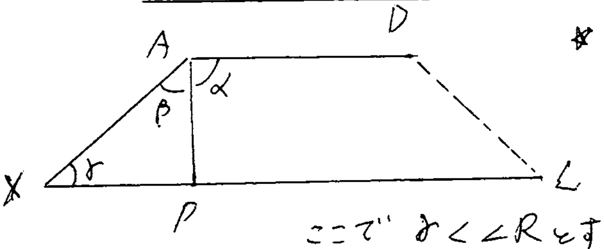
$\alpha < \beta$　　$\alpha' < \alpha \rightarrow \alpha' < \beta$

⑤, ⑥から　$\gamma > \delta$　となり $DM < DA$ に矛盾する。

以上より $DM > D\bar{F} = DA$

従って 命題10より** $AB < BM$ となり ③が言える。

（命題13）（有限の長さの）XA が 2つの直線 AD, XL と交わって 同じ側の内角 $\angle XAD$ と $\angle AXL$ の和が $2\angle R$ より小さければ（そのどちらかが直角でなくても）直角または鈍角の仮定のもとでは、これら2つの直線は 和が $2\angle R$ より小さい2角のある側の一点で交わる。しかも有限距離で。



* これは第5公準（!）

証）左図で 仮定より

$\alpha + \beta + \gamma < 2\angle R$ ①

ここで $\gamma < \angle R$ とする。

（$\gamma = \angle R$ ならば 命題11, 12に帰着する。）

A から XL に垂線 AP を引く。（これは $\angle AXL$ の内側にある。）

直角及び鈍角の仮定のもとでは $\beta + \gamma \geqq \angle R$ ②（サッケーリ命題9）*

① ②より　$\alpha < \angle R$ → 命題11と12に帰着。（$\angle AP = \angle R$ で）　△

＜コメント＞ しかし ②のとき *$\triangle ADB$ の内角の和は $\geqq 2\angle R$ となるが これは「三角形の内角の和は $2\angle R$ より大きくない。」**（サッケーリ、ルジャンドルの定理）に矛盾します。これにサッケーリは気がつかなかったのか。そして命題14までいって 鈍角仮定は自己矛盾するといっています。第5公準は証明されなかった（!）

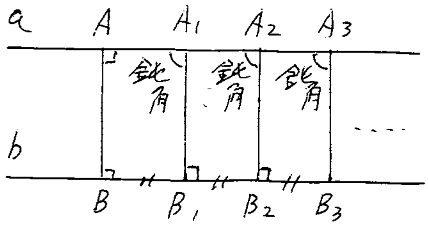
また鈍角仮定は仲々矛盾がでてこなかったが、それは このとき上記の議論でいうと $AB > BM$（$AD = D\bar{F}$ のとき）（命題11, 12）となり、困るので。

* これは平行線の公理なしに証明される。（「幾何物語」に）

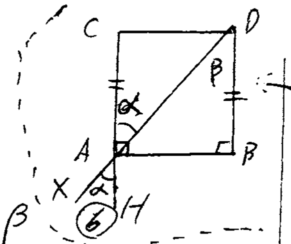
* ランベルトの鈍角仮定の矛盾の説明

以下「非ユークリッド幾何」（大矢真一）P58〜P60より

「右図で $a \parallel b$（←第5公準なしにいえる←命題27, 28）



* 命題8

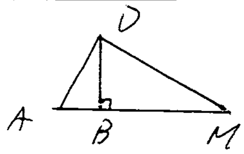


鈍角仮定では $CD < AB$（命題3）

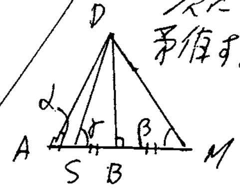
$\triangle ADB$ と $\triangle DAC$ において $\alpha < \beta$

$\therefore \angle XAH < \angle ADB$

** 命題10



$DM > DA \Rightarrow BM > BA$ をいう。まず $BA \neq BM$ 次に $BA > BM$ とすると矛盾する。∵）



$BM = BS$ をとる。$\gamma = \beta$ となる。ここで $\alpha < \gamma$ より $\alpha < \beta$ となるが $DM > DA$ から $\alpha > \beta$ に矛盾する。△

* 命題9

レポートP4の左の図において

i) 直角仮定 ⇒ $\alpha = \beta$

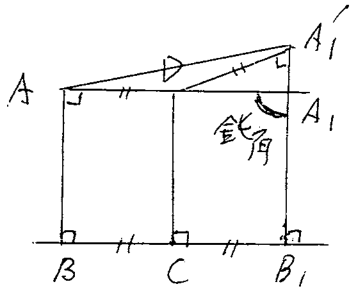
ii) 鈍角仮定 ⇒ $\alpha < \beta$

従って $\triangle ADB$ で

i) のとき $\angle B + \beta + \gamma = \angle R + \alpha + \gamma = 2\angle R$

ii) のとき $\angle B + \beta + \gamma > \angle R + \alpha + \gamma = 2\angle R$

右図でCDを折り目に折り返すと



$B \to B_1$, BAはB_1A_1に重なる。
このとき Aのおちる点をA_1'とする。
ここで$\angle DA_1B_1 > \angle R$, 外角は内対角より大きいより. A_1'はB_1A_1の延長上にくる。(右上図)ゆえに $AB > A_1B_1$ …

次に A_1B_1とA_2B_2の長さをくらべる。
$\angle B_1A_1A$は鈍角より $\angle B_1A_1A_2$は鋭角。(下図)
そこでA_1からA_1B_1に垂線をたてると
これはB_2A_2の延長と交わる。この点をA_2'とする。
すると前と同じようにして

$A_1B_1 > A_2'B_2$ かつ $A_1B_1 - A_2'B_2 = AB - A_1B_1$

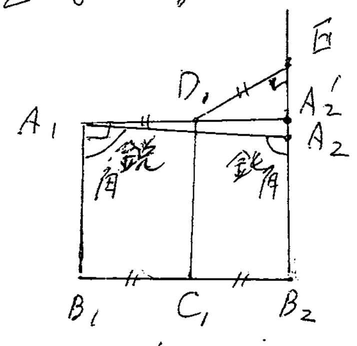
しかも $A_2'B_2 > A_2B_2$ より $A_1B_1 - A_2B_2 > AB - A_1B_1$

つまりさきにいくほど、隣り同士の垂線の長さの差はだんだん大きくなっていく。従って

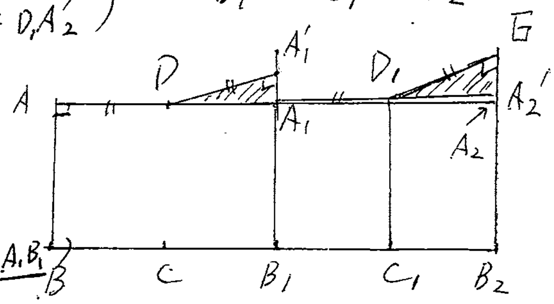
$(AB - A_nB_n) > n(AB - A_1B_1)$ 」

(傍線 飯島)

<コメント> 始め 前と同じようにして
とあるので $A_1B_1 = A_2'B_2$ ではと思いました。が
右図になると気がつき、すると $A_1B_1 = EB_2$



で $A_1B_1 > A_2'B_2$、さらに
$A_1B_1 - A_2'B_2 = AB - A_1B_1$ は
右下図で $EA_2' = A_1'A$ になり
DA_1は、D_1A_2'にあたるから ($DA_1 = D_1A_2'$)
$\triangle DA_1A_1' \equiv \triangle D_1A_2'E$ (直角三角形で斜辺と1辺の合同)
より $EA_2' = A_1'A_1$ となる。



としました。 ($EA_2' = A_1B_1 - A_2'B_2$, $A_1'A_1 = A_1'B_1 - A_1B_1 = AB - A_1B_1$)

さらに $(AB - A_nB_n) > n(AB - A_1B_1)$ で nをどんどん大きく
*右辺は. すると*ABより大きくなり、この左辺はABより小より矛盾と。」

* ここで、サッケーリと同様に直線は無限に延長できるを前提にしている。無限には延長できない世界ではいえない。

＊ サッケーリの鋭角仮定より

鋭角仮定よりすると、仲々矛盾がでてこず次のような定理*がえられました。以下「幾何物語」（瀬山士郎　P135より）（＊20有余の）そのうち

「。三角形の内角和は、2直角より小さい。*

。直線上外の1点を通り、この直線に平行な直線が2本以上存在する。

。3つの角がそれぞれ等しい2つの三角形は合同である。（←合同でないとすると、矛盾する（三角形の内角和＜2∠Rとならないことを）をいう。）

。合同な場合をのぞき、相似な三角形は存在しない。

。正三角形（3つの内角の等しい三角形）の辺の長さは、角の大きさで決まってしまう。

。三角形の面積は、2直角と内角和の差に比例する。」

これらは　ボヤイ、ロバチェフスキーの非ユークリッド幾何で成り立つ内容です。サッケーリは　ここまでだしながら、ユークリッド幾何　の正しさを信じていたために、以上は　おかしい　としてしまいました。

論理的に不合理では　なかったのですが。（但し命題13で、不合理な点があった。）*

＊ということは、三角形により内角の和が異なる(!)。→3辺が大きくなる程、内角の和は、小さくなる。シュワイカルト（ドイツ、1780～1859）もこの命題（＜2∠R）をガウスに送る。（1818年）

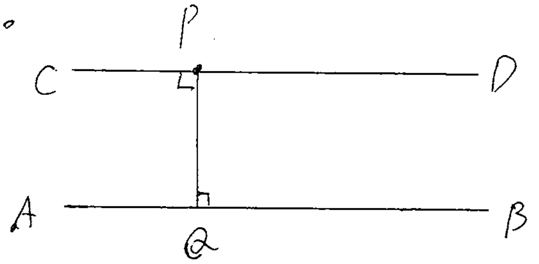
＊以上　非ユークリッド幾何までの成立史より。

3　非ユークリッド幾何での平行について

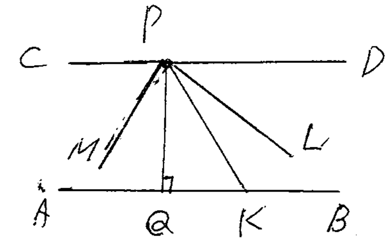
非ユークリッド幾何は、第5公準（またはそれをいいかえたもの）を否定したものより、直線上外の1点Pを通るその直線と平行な直線は、2本以上*または無い、となります。前者が、ボヤイ、ロバチェフスキーの後者が、リーマンの非ユークリッド幾何に（平行線がない）。

＊宇宙空間での光線は、レポートP8の上図で、CDより少しずれれば、ABと交わらないのがありうる。（「新幾何学思想史」（近藤洋逸　P106）

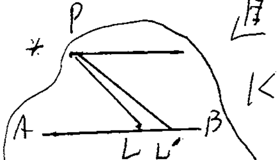
直線とその上にない1点Pがある。



右図のようにP, Q, CDをとる。
するとPを通ってABに至る直線は、ABと交わるか交わらないかである。すると交わるか交わらないかの境目の直線PLがある。



すると<u>PLは、交わるか交わらないかどちらか</u>。大矢先生の説明は、今交わる直線PK（KはABとの交点）とするとKはBの方へどこまでも取れるから端がない。従って<u>PLは交わらないに</u>。*



PLがもしABに交わるとするとLの右側の点L'とするとPL'も交わる。(L→L'として)するとPLが境界線としたことに矛盾する。

別の説明としてPDを時計回りにして、PLはABと交わらない最後の直線とする。（「みえる数学の世界2」P432）

でも最後の直線とは(?)

この<u>直線PLを、ABの平行線と呼ぶ</u>。
すると上の右下図で∠DPL内にあるPを通る直線は皆ABと交わらないことになる。（これは無数にある！
またPQについてPLを折り返すとこれもABに平行**より、平行線は2本になる。

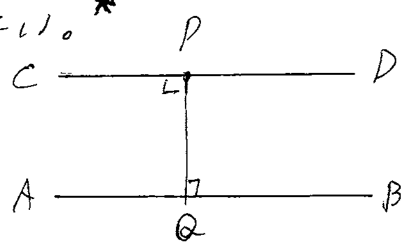
** 上図の PM

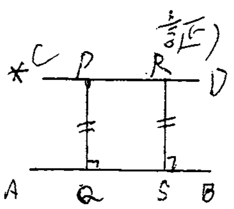
以上よりPを通る直線は、ABについて
(1) 交わる　(2) 交わらない（平行でない）
(3) 平行　(2本）***　となる。

*** これが公理となる。(=基礎の仮定)

* (2)の時 非截線、超平行ともいう。せつ(截)

（例1）点Pから直線ABに垂線PQを下す。Pを通りPQに垂直にCPDを引くとき直線CPDはABと交わらないが、ABと平行でもない。*





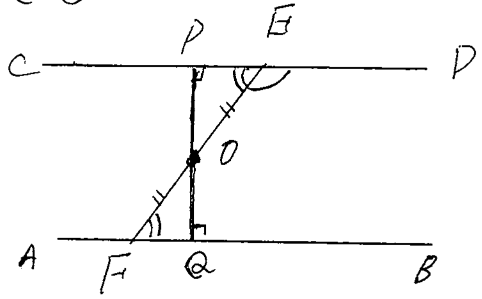
上図の時も∠QPR=∠SRPだが、PRはABと交わらず、平行でもない。

証）(1) PQを折り目として折り返すとPCはPDに重なり、QAはQBに重なる。それゆえもしCDとAB<u>とがD, B側で交わるとすると</u>、C, Aの側でも交わる。2点を通る直線は1つしかないから、2直線が2点で交わることはない。**
従って<u>CDとABは交わることはない</u>。
** 2点を通る直線は1つしかないは、この幾何学でも肯定する。（否定する非ユークリッド幾何もある。）
なお この時、2直線は、CPDとAQB。

(2) 一点PからABに平行な半直線は
2つある。もしCDがABに平行ならば
Pを通るABの平行線は1つしかないこと
になる。従ってCDがABに平行になることはない。
(∵非ユークリッド幾何の平行の定義より)

(例2) 2直線が1直線と交わり、同じ側の内角の
和が2∠Rであるとき、はじめの2直線は
交わりもせず、平行でもない。

証) 2直線CD, ABが一直線EFに
交わって　∠DEF＋∠EFB＝2∠R ①
とする。



EFの中点をOとし、OからCD,
ABに垂線OP, OQを下す。
OE＝OF, ∠OPE＝∠OQF＝∠R
∠OEP＝∠OFQ (∵①より)
より、△OPE≡△OQFで∠POE＝∠QOF
ゆえにPQは一直線になる。
従って(例1)によりCDはABと交わらず、平行でもない。」
(以上 $\boxed{3}$ は、「非ユークリッド幾何」(大矢真一) P79～80 より)

(注1)「幾何物語」(瀬山士郎　ほるぷ出版　1993刊)
P131　ここには同値の証明がなかったので。

(注2) (注1)の本　P124

(注3)「ユークリッド幾何から現代幾何へ」(小林昭七
日本評論社　1990初刊)のP38。第2章で非ユークリッド幾何の成立を。

< 引用、参考文献 >

(1) このレポートで引用しました「非ユークリッド幾何」(大矢真一
岩崎書店　1967刊)

(2)「幾何学思想史」(伊藤書店 1946刊)「新幾何学思想史」(三一書房 1966刊)(共に近藤洋逸)
後に「近藤洋逸数学史著作集」(第1巻)(日本評論社 1994刊)
に。ここには「幾何学と空間」の論文がある。

*サッケーリの鋭角仮定の時の内容がある。
*ランベルトについて詳しい記述。(P41～P64)

(3)「平行線」(中沢貞治 共立出版 1979刊)
ここには サッケーリの詳しい記述とユークリッドの原論第1巻の命題1〜48の証明があり、便利です。

<おわりに>

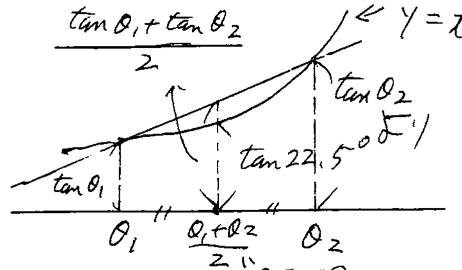
現在67才ですが、こういうレポートがかけることは、嬉しいと。* この内容で教訓的なのは、公理(公準)は絶対的に正しいものではなく、仮定であることを示したこと。別の仮定をたてると別の幾何学ができ、それらは両立する。
そして「ユークリッド幾何は絶対正しい」の枠からぬけることが、いかに難しいかを**。(パラダイム)
このことは数学に限らず、歴史、政治、経済等についても、その時の自分の見方、価値観はあっても、一方常に白紙に戻す—それは正しいか—態度も必要を、示唆していると思いました。

* 今までに購入していた本が、参考に。

** 19世紀のはじめまでユークリッドの正しさに疑いをもたなかった。(本当は、こう仮定すればこういうことがいえ、別の仮定をおけば、別の内容が)

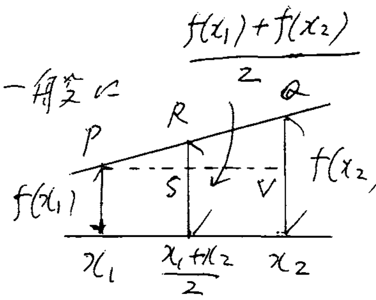
<追記1>「幾何物語」の中に—これはクラインのモデル(円内の世界)で、計算によって、三角形の内角の和は、2直角より小さいを示す所です。— $\theta_1+\theta_2=45^\circ$ $\theta_1 \neq \theta_2$ の時 $\tan\theta_1+\tan\theta_2 > 2\tan 22.5^\circ$ の式(P148)があり、?なので瀬山先生に質問*、すぐお返事が。それをヒントにわかりました。ポイントは tanθのグラフは下に凸。

* 質問できることが、ありがたい。



$\frac{\tan\theta_1+\tan\theta_2}{2} > \tan 22.5^\circ$ より。

∵) 一般に

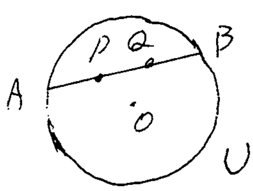


(私は $\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$ は左図で △PRS ∽ △PQV よりだしました。)

* ケーリー・クラインのモデル—ユークリッド幾何内にモデルを作る— ケーリー(イギリス) 1859年に クライン(ドイツ) 1871年。 ＊1870年(明治3年)の記述も。

<追記2> 追記1と関連しますが、「幾何物語」の中に

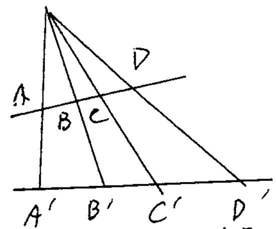
◎「円内の距離* PQ ($\widetilde{PQ}$と表す。通常の$\overline{PQ}$と区別して)
$\widetilde{PQ} = K\log_e{}^{**}\left(\frac{\overline{AQ}\cdot\overline{BP}}{\overline{AP}\cdot\overline{BQ}}\right)$ としてU内の長さを決める。(Kは適当な単位にするための定数)」とあります。(P145〜P146)



** log_e としましたが、底は1より大きい数であればよいの記述。（「いろいろな幾何」（中沢貞治）に）

。上記の（　）内の式は何か。「みえる数学の世界2」（大竹出版 2000年刊）の中に、'射影幾何学では、「平行な線分の長さの比」は意味を失う。とあり、平行な長さの関係に変わって直線上の4点の複比（または非調和比）が研究されます。' とあります。

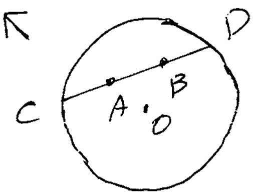
複比は右図の4点A, B, C, Dに対して $\dfrac{AC}{CB} : \dfrac{AD}{DB}$ で与えられる。*（線分は有向線分）



このとき $\dfrac{AC}{CB} : \dfrac{AD}{DB} = \dfrac{A'C'}{C'B'} : \dfrac{A'D'}{D'B'}$ がいえる。

* ACをBで分ける比 ①
ADをBで分ける比 ②とするとき ①と②の比。
本により定義が違う。（たとえば下の*）

＜距離＞を定めるには、すべての＜運動＞で不変であることが必要。＜運動＞は射影変換ですから、複比を保存する。（右図）そこで ＜距離＞を $\left| log_e\left(\dfrac{AC}{CB} \div \dfrac{AD}{DB}\right)\right| = \left| log_e\left(\dfrac{AC}{CB} \times \dfrac{DB}{AD}\right)\right|$ で定義する。' と（P442～P443）



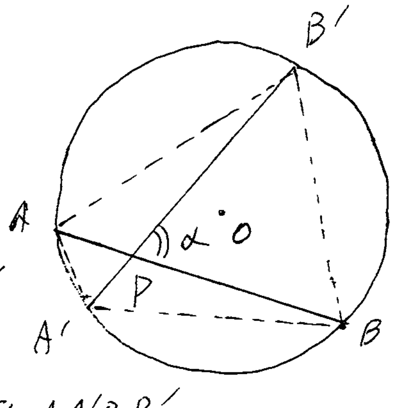
＜コメント＞ これはレポートP10の $\widehat{PQ}$ において、$K=-1$ の時にあたります。（$C \to A$, $A \to P$, $B \to Q$, $D \to B$ として） 従って $\left(\dfrac{AD}{DB} \div \dfrac{AC}{CB}\right)$ で定義すると、$K=1$ の時に。

なお この時 $\widehat{PP}=0$, $\widehat{PQ}=-\widehat{QP}$, $\widehat{PQ}+\widehat{QR}=\widehat{PR}$ が成り立つ。逆にいうとこうなるためには複比が。特に $\widehat{PQ}+\widehat{QR}=\widehat{PR}$ について複比の積をとるといえ、logをとると、積→和になります。

◎「幾何物語」の中に、角度の定義は、'右図において

$$\tan^2\frac{\alpha}{2} = \frac{\overline{AA'} \cdot \overline{BB'}}{\overline{AB'} \cdot \overline{BA'}}$$

と定義する。*' とあります。そしてここで 'Pが∪の中心Oに一致するとよく知っている角の定義に一致する。' とあります。（P146～P147）



*なぜ？について「幾何の発想」（寺阪英孝 数学セミナーリーディングス 1992刊）P5に説明が。まず右図で $P \to O$ の時からしています。なお「現代数学小事典」（ブルーバックス 1977年刊）に非ユークリッド幾何の解説が。寺阪先生の執筆と思われます。

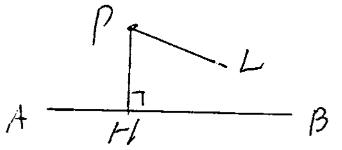
$P \to$ 中心O

→ 確かに この時（〃）四角形 $AA'BB'$ は、長方形になり $\tan\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{\overline{AA'}}{\overline{AB'}}$ となり
$\overline{AB'}=\overline{BA'}$, $\overline{AA'}=\overline{B'B}$ より $\tan^2\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{(\overline{AA'})^2}{(\overline{AB'})^2} \to \tan\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{\overline{AA'}}{\overline{AB'}}$ に。

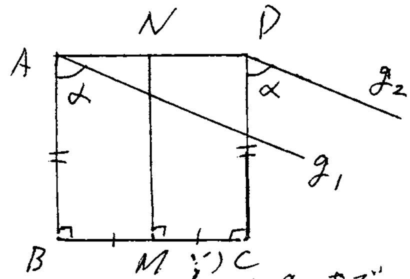
〈追記3〉 ボヤイ・ロバチェフスキーの幾何では、「三角形の内角の和は 2∠R より小さい。」その初等幾何的証明が「数学事典」(大阪書籍 1950刊)にありましたので それをもとに。

〈定理A〉 2直線が1直線と交わり、その内対角の和が 2∠R ならば、その2直線は平行でもなく、交わりもしない。

〈コメント〉 このレポート P9の例12。このことから PL は AB に平行のとき ∠BHP + ∠LPH < 2∠R がいえる。



〈定理B〉 四辺形ABCDにおいて ∠B=∠C=∠R, AB=DC ならば ∠A=∠D=鋭角。即ちサッケーリの鋭角仮定が成りたつ。*



証) BCの中点Mとし Mから BCに垂線をたてると ABCDは MNについて対称。∴∠A=∠D

A, Dを通り、BCに平行線 g_1, g_2 を引けば** AB=DCより*** $\angle BAg_1 = \angle CDg_2 (=\alpha)$ (g_1をg_2まで平行移動して)

よって $\angle DAg_1 + \angle ADg_2 < 2\angle R$* ∴ $\angle A = \angle D < \angle R$ **

〈コメント〉 ** → $\angle DAg_1 + \angle ADg_2 = \angle DAg_1 + \alpha + \underset{\angle ADC}{\angle D}$ ①

$\angle D = \angle A = \alpha + \angle DAg_1$ より

①の左辺 $= 2(\alpha + \angle DAg_1) < 2\angle R$

∴ $\underbrace{\alpha + \angle DAg_1}_{\angle A = \angle D} < \angle R$

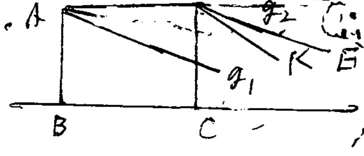
* < 2∠R は Ag_1 をもとの直線とみると定理Aのコメントより。

* これは ボヤイ・ロバチェフスキーの幾何での平行の定義より ∠A=∠D は鋭角に。即ちサッケーリの鋭角仮定の時がボヤイ・ロバチェフスキーの幾何学に。

** この時 $g_1 // g_2$
($g_1 // BC$, $BC // g_2$ ⇒ $g_1 \not\parallel g_2$。これは証を要しますが)

*** この時 MNについて折り返すと…。

証)の方針
1) g_1とg_2は交わらないをいう。→もし交わるとすると矛盾
2) $g_1 // g_2$でないとすると矛盾をいう。
1)をもとに。g_1に平行なDKをひく。DKは∠EDC内より BCの延長と交わる。→g_1と交わる→矛盾。($g_1 // DK$に)

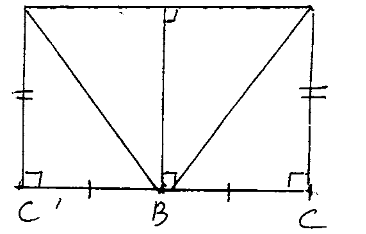


〈定理C〉 四辺形ABCDにおいて ∠A=∠B=∠C=∠R ならば ∠D=鋭角 (ランベルトの鋭角仮定)

証) CBを2倍に延長した点をC'とし C'から C'Bに垂線C'D'を引き、D'C'=DC とする。

右図で △D'C'B ≡ △DCB (∵この時 ∠C'=∠R)

D'B=DB, ∠D'BC'=∠DBC

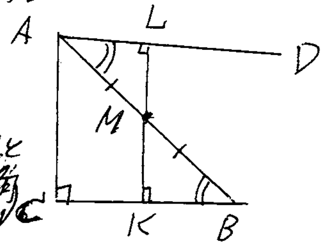


∴∠D'BA＝∠DBA　∴△D'BA≡△PBA→∠D'AB＝∠DAB
＝∠Rより→ D'A, ADは一直線になる。
従って四辺形D'C'CDに定理Bを用いて∠D＝鋭角 △

＜定理D＞ △ABCの3つの内角の和は2∠Rより小。

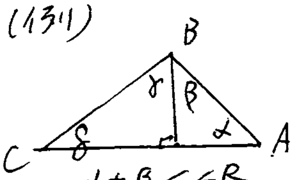
証）1）∠C＝∠Rのとき

Aを通り∠CBA＝∠BADなる直線ADを引く。ABの中点MからBC, ADに垂線MK, MLをおろすと △MKB≡△MLA（斜辺と一鋭角より）



∴∠KMB＝∠LMAとなり L, M, Kは一直線上にある。従って四辺形ACKLは3つの角が直角より定理Cにより
∠DAC＝鋭角。∵∠DAC＝∠DAB＋∠BAC
＝∠ABC＋∠BAC
よって△ABCの内角の和＝∠ACB＋∠BAC＋∠ABC
＝∠R＋鋭角＜2∠R
△

2）∠C≠∠Rのとき
∠C鋭角, 鈍角の時, 共にこれを2つの直角三角形に分けてすればよい。
（例）

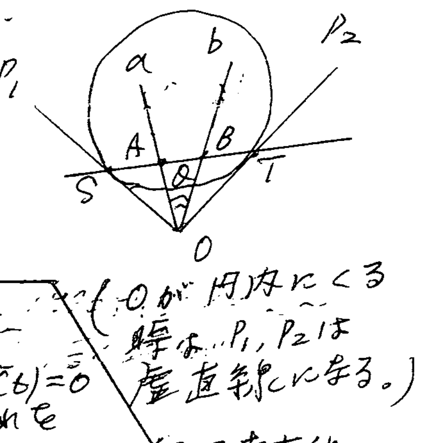


$\alpha+\beta<\angle R$
$\gamma+\delta<\angle R$
∴△ABCの内角の和＜2∠R

＜追記4＞ 2直線a, bをなす角をθ, 定点Oから引いた接線OS, OTを引いて

$$\theta=\frac{1}{2i}\log_e(a,b;P_1,P_2)^{*}$$

（ロバチェフスキー（ボリアイの幾何での））
（ケーリー, クラインの表示）（ここに$(a,b;P_1,P_2)$は4直線の複比＝右図のS, A, B, Tの複比とする。）
ここにlogがあり、**iもでてくる。
（この内容は、私には？ですが → 追記5を）



（Oが円内にくる時はP_1, P_2は虚直線になる。）

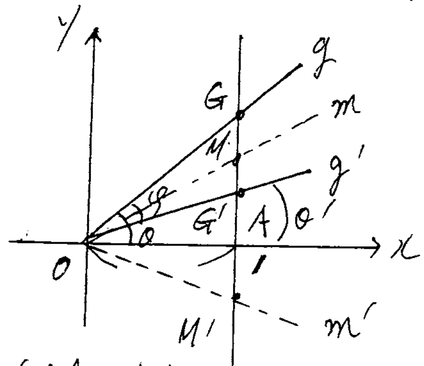
cf レポートP11での角の定義。

**キョリの定義と関連する。＜双対的になっている。＞

$(a,b,P_1,P_2)=-1$のときは$\theta=\frac{\pi}{2}$となる。
（∵$\log_e(-1)=\pi i$）
これは何を意味するか。
（* $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$ で$\theta=\pi$のとき）

P14 一番下の**について
円 $x^2+y^2+Ax+By+C=0$ は斉次座標では $x^2+y^2+t(Ax+By+Ct)=0$
→ $t=0$のとき $x^2+y^2=0$, $t=0$ → これをみたす $(x,y,t)=(1,i,0)\ (1,-i,0)$
すべての円は$(1,i,0),(1,-i,0)$を通る。← 無限遠直線上の2点。
→点円もこの2点を通る。→P14（注2）①の前の直線は$(1,i,0)$を、①の後の直線は$(1,-i,0)$を通る。

<追記5>　追記4 即ち この角の定義について、ケーリー、クラインによる定義の前に、ラゲール(フランス 1834〜1886)が似た公式を発見した。何と19才(1853年)の時と。以下「非ユークリッド幾何」(佐藤三郎 1949年 弘文堂)を参照して



(OA=1)

左図で g と g' のなす角 φ(ファイ)
x軸とgのなす角θ、x軸とg'のなす角θ'とする。($\varphi=\theta-\theta'$)
$GG'MM'$のy座標は $\tan\theta$, $\tan\theta'$, i, $-i$。($m: y=ix$, $m': y=-ix$ となる。)(注2)

複比$(gg'mm')=(GG'MM')$(左辺を右辺として)

ここで $(gg'mm')=\dfrac{\tan\theta-i}{\tan\theta+i}\div\dfrac{\tan\theta'-i}{\tan\theta'+i}$ ①(注1)となる。

$\tan\theta$ を sin, cos で表すと

$$\frac{\tan\theta-i}{\tan\theta+i}=\frac{\cos\theta+i\sin\theta}{-(\cos\theta-i\sin\theta)}=-e^{2i\theta}$$

(↑えられた式に分母子に $\times\frac{i}{i}$ して)　(オイラーの公式 $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$ より)

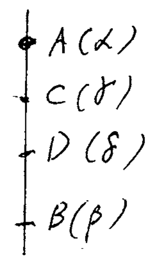
同様にして $\dfrac{\tan\theta'-i}{\tan\theta'+i}=-e^{2i\theta'}$

ゆえに ① $=e^{2i\theta}\div e^{2i\theta'}=e^{2i(\theta-\theta')}=e^{2i\varphi}$

$\therefore (gg'mm')=e^{2i\varphi}\rightarrow \log_e(gg'mm')=2i\varphi$

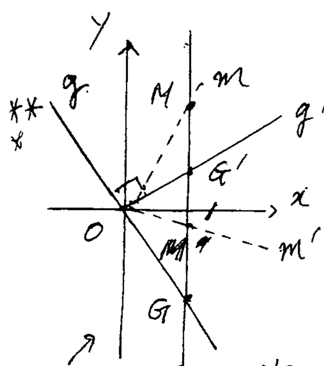
$\rightarrow \varphi=\dfrac{1}{2i}\log_e(gg'mm')$ △

(注1) この時　右図の複比を $(ABCD)=\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\gamma}\div\dfrac{\delta-\alpha}{\beta-\delta}$ と定義。
$A\to G$, $B\to G'$, $C\to M$, $D\to M'$ となる。



(注2) $m: y=ix$, $m': y=-ix$ について
円 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ で $r=0$ とする。(点円)せい
次に $x\to\frac{x}{t}$, $y\to\frac{y}{t}$, $a\to\frac{a}{c}$, $b\to\frac{b}{c}$ にかえる。*
$\rightarrow (cx-at)^2+(cy-bt)^2=0$
$\rightarrow cx-at+i(cy-bt)=0,\ cx-at-i(cy-bt)=0$ ① に分解(2つの虚直線に)**
$\rightarrow (x,y,t)=(a,b,c)$ は ①をみたす。
$\rightarrow$ 原点を通る虚直線は $(a,b,c)=(0,0,1)$を代入 $\rightarrow$ ①は $y=ix$ と $y=-ix$ になる。

*斉次(同次)座標にする。← $x\to x:t$ とする。$t=0$のとき x: 無限遠点を表す。



(Gのy座標は $\tan\theta$)

(注3) 特に $\varphi=\frac{\pi}{2}$ のとき *** $(gg'mm')=-1$ となる。G, G', M, M'は調和点列に。
(∵ レポート p13の左下の★EP)

(2013.5月〜7月記)

** 計算ではそうですが、これはどういうことか?です。