学校番号　55)

平成15年度埼玉県高等学校教育課程・授業改善研究協議会 数学)

学校名・氏名　　埼玉県立久喜工業高等学校・武田利一

研究主題

授業及び評価の工夫・改善の取組について

「私の数学教育32年間の変遷」　2003. 7. 29 火)

0. 民間サークルとの出会い

大学受験の数学しか学ばなかったと思える高校時代 何故そうなるのか分からないまま、公式等を使って問題を解いていた)を引きずったまま、高校教師となった。数学教育を指導する側になると、分からないことだらけである。

「何故そうなるのか」を学ぶ場所として、本や研修場所を探して、アチコチに顔を出した。その中で、民間サークル 数学教育協議会 略して、数教協)」 に出会うことになった。

この数教協で、20歳代は 学ぶ」ことを中心に過ごした。30歳代は 発表して批評を受ける」ことを中心に、恐い者知らずに発表をした。40歳代は、関東や埼玉県の地域サークルに積極的に参加し、 授業書づくり」を中心に活動した。50歳代はホームページを利用して 質問受付活動」を中心に過ごしている。

毎年夏に行われる数教協の全国大会 今年は8／ 9～ 11に、北海道大学で行われる)は、私費で参加し、 数学教育の時代の流れ」を学んでいる。

1. 幻の0番法 数列の一般項)

等差数列や等比数列を学んだあとに出てくる 階差数列」の特長を調べている中で、数列の一般項が、初項の前の0番目に出てくる数字によってある程度判断できるということから教材化したのが、 幻の0番法」である。＜資料①参照＞

調べていく中で、このアイデアは、ニュートンの前進補間公式に出ているし、岩手数教協の伊藤潤一さんの初期の発表にも見受けられた。高橋健人著の 差分方程式」培風館、吉田洋一監修)の本にも関連する内容が出ていた。自信を持って、文章化したものを、日本評論社の数学セミナーリーディングス1990 新しい高校数学の展望」に寄稿することができたのが、唯一の喜びである。

2. 三点法 (2次関数のグラフ)

困難校へ転勤する中で、2次関数のグラフが書けない生徒多数に直面することになった。理由は、平方完成 完全平方)ができないからである。2次関数のグラフを別の方法で書けないかと検討する中で、自由の森学園の増島高敬さんの発表に触発されて、埼玉数教協の村嶋健吾さんや飯島光治さんとグループを作り冊子にまとめたりした。＜資料②参照＞

3. 三角比の定義 (2辺の比から1あたり量へ)

2辺の比を使った三角比の定義だと、鋭角の定義と、鈍角の定義と、三角関数の定義とその都度定義が変化していく。これを何とか統一できないのか検討する中で、 1あたり量」の考え方 数教協の水道方式から)を利用する方法が生まれてきた。この考え方に立って、生井敬治さんもグループに加わって、 授業書づくり」に努力した。＜資料③参照＞

4. 対数直線 対数関数の応用)

愛知数教協の右左見直英さんの発表 (1977年)や山田正男さんの授業書 (1981年 9月)に刺激を受けた埼玉の森下健七郎さんの 授業書づくり」の実践に学んだ。対数直線を使って、対数関数全般の授業書を作成した。応用問題が、微分方程式を使わずとも平易に解けることが魅力であったが、対数直線への馴染みが一般的には難しかった。

＜資料④参照＞

5. 暗号の数学 合同式と1次不定方程式)

京都数教協の高田加代子さんの発表に刺激されて、まとめた内容である。インターネットの情報交換のデータにスクランブルをかけると言う 公開かぎ」について、数学が使われている一面を紹介する内容だが、授業ではできなかった。公開授業などの読み切り式の時間に取り上げると良いかも知れない。＜資料⑤参照＞

6. 統計から推計へ 正規分布)

カリキュラムの関係で、3年生の勉強が早めに終わり、あとの余った時間（10時間ぐらい）を利用して、関数電卓等を利用して、統計の学習を取り入れた。統計だけでなく、就職したあとのことも考えて、推計学の触りも紹介した。＜資料⑥参照＞

7. 関数電卓を利用してレベルアップ

本校に転勤して、関数電卓やポケコンは全員購入しているし、工業系の授業で大いに利用していることに気づいた。それが、基礎的な計算が苦手な工業生でもレベルの高い工業系学問を学ぶことができるのだと理解した。そこで、数学のあらゆる分野にも関数電卓等を取り入れて展開することを考えてみた。1992年当時から東京数教協の黒田俊郎さんが関数電卓を使った授業研究を行っていたこともキッカケであった。＜資料⑦参照＞

8. BASICで内分（アニメーション）

アニメーションが、内分を利用してできると神戸商科大学の木村良夫さんからお話をうかがって、早速本「パソコンを遊ぶ簡単プログラミング」（ブルーバックス）を購入してみた。十進BASIC（文教大学の白石和夫さんの自作フリーソフト）のプログラムでできるので、私にも作ることができた。動きのあるものができるので、興味がわくこと必須だろう。まだ授業で実際にやっていないが、教科「数学」でコンピュータを扱わなくなってきたのは、残念である。教科「情報」で扱ったらどうだろうか。
＜資料⑧参照＞

9. ホームページを利用した質問受付活動

5年ほど前から、ホームページ「高校数学の窓」(http://whs-math.net　)を作成している。できることは何か考えたとき、高校数学の質問に答えてあげることぐらいだろうと思い開設した。高校数学のみならず、大学基礎数学の質問もあり、困惑しているが、応援してくれる人もいて、何とか続いている。

質問の中には、新鮮な課題もあり、勉強になることも多くある。退職まであと6年だが、退職後の道楽ができるのではと喜んでいる。＜資料⑨参照＞

＜資料①＞

(例)次の数列の一般項を求めよ。

2, 4, 7, 11, 16, ………

階差数列を書くと、

```
 ①  ②  ③  ④   ⑤
 2,  4,   7,  11,  16, ………
  ∨  ∨  ∨   ∨
   2   3   4   5 ………        第1階差数列
    ∨    ∨  ∨
    1     1    1  ………       第2階差数列
```

第2階差数列が一定となるので、

ニュートンの前進補間公式「第n階差がほぼ一定になれば、関数はn次にかなり正確に近似される」

より、もとの数列は、2次関数と考えられる。
2次関数の0周辺の特長から、2次関数を特定することができる。そこで、0番目に着目して、公式化したのが、「幻の0番法」と言うネーミングの方法である。

```
 [0]   ①  ②  ③  ④   ⑤
  1   2,   4,   7,  11,  16, ………
   ∨    ∨  ∨   ∨   ∨
    1     2    3    4    5 ………       第1階差数列
      ∨  ∨    ∨    ∨
       1    1     1     1   ………      第2階差数列
```

2次関数 $y=ax^2+bx+c$ に、$x=0, 1, 2, 3,$ ………を代入すると、

```
 [0]      ①           ②            ③           ④
  c    a+b+c   4a+2b+c    9a+3b+c    ………
    ∨         ∨            ∨            ∨
  a+b      3a+b        5a+b         ………              第1階差数列
        ∨          ∨            ∨
        2a         2a         ………                    第2階差数列
```

上の図と下の図を見比べて、

$$\begin{cases} c=1 \\ a+b=1 \\ 2a=1 \end{cases}$$

これを公式化すれば、簡単にもとの数列の一般項が求まる。

$a=\frac{1}{2}$, $b=\frac{1}{2}$, $c=1$

したがって、

$$a=\frac{n^2+n+2}{2}$$

これを拡張すれば、第1階差が一定の場合が、等差数列。第3階差が一定の場合が、3次式の数列となる。多くの問題は、第2階差が一定の場合が多いので、上の例で十分であろう。
数列が違った風に見えてくるのではないか。研究の先に「差分方程式」が見えてきて、微分・積分と同様に、差分・和分があることが分かった。

＜資料②＞

例）2次関数　$y=-x^2+6x-1$ のグラフを書け。

y切片を通る水平線　$y=-1$ と2次関数との交点のx座標を求める。

$-x^2+6x-1=-1$

$-x^2+6x=0$

$-x(x-6)=0$　　←この因数分解ができないことが多い。

$\therefore x=0,\ 6$　　←$x=0$が出せないことが多い。$x=-6$とする生徒もいた。

このx座標の中央より、

$$x=\frac{0+6}{2}=\frac{6}{2}=3$$

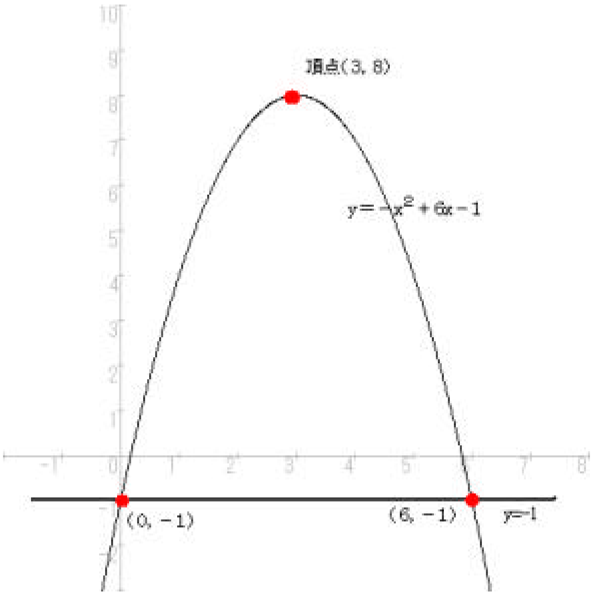
この$x=3$を2次関数に代入して、y座標を求める。

$y=f(3)=-9+18-1=8$

この計算で、2次関数の3点の座標が求まる。

$(0,-1)$　$(6,-1)$そして、頂点　$(3,\ 8)$

これよりグラフは、次のように書ける。



＜資料③＞

島根数教協の中原宣さんの発表「三角比の歴史の厚みと奥ゆき」（数学教室」1986年9月号、国土社）と埼玉数教協の飯島光治さんの発表「三角比・三角関数の歴史」(1991年1月)に、歴史を調べたものがあった。
「2辺の比」定義の三角比と「円関数」定義の三角関数の誕生について記述があったが、次のような過程を経ていることが分かる。

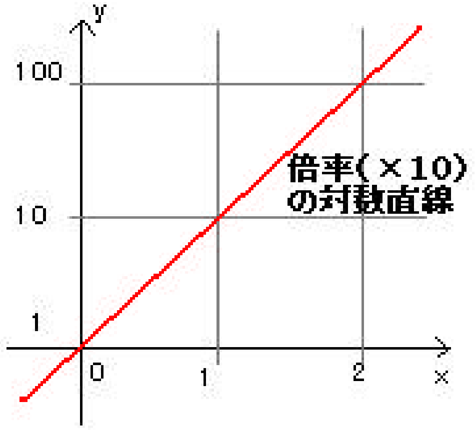
(1) ピラミッドなどの高さを測る計算と、プトレマイオスの「アルマゲスト」(2世紀頃)に見られる円の弦の長さを求める計算とが初期には行われていた。
(2) 2倍角の公式など多数の公式を研究した。(10世紀頃)
(3) 正弦表などの表づくりが熱心に取り組まれていた。
(4) アル・ビールニー(10世紀頃)は、r＝1として、正弦表などを作成した。それまでは、r＝60などとしていた。
(5) 16世紀に、ドイツのラエティクスが、はじめて弧と弦の関係から離れて、角と長さの関係として三角比を定義した。
(6) 18世紀に、オイラーがr＝1の単位円を利用して、三角関数の扱い始めた。記号sin, cos, tanの利用も始めた。また、3辺の比ではなく「2辺の比」を用い始めたのもオイラーと言われている。

以上のように、「2辺の比」と「円関数」は、複雑な過程を経て、オイラーによって、まとめ上げられたと考えるのが筋であろう。
そこで、鋭角・鈍角・一般角と定義が変化する「2辺の比」方式よりは、r＝1の単位円として定義する「円関数」方式の方が、スムーズな展開となると考えた。当然、鋭角のときの定義は、単位円は使わず、斜辺1として、cosを底辺の長さ(x座標)、sinを高さ(y座標)として始めるわけだ。これは、鈍角にも一般角にも拡張することは容易である。更に、斜辺rのときに拡大すれば、「2辺の比」にも直せる。
この斜辺1のときの底辺や対辺の長さ(量)は、1あたり量に該当する。1あたり量とは、小学校のかけ算のときなどに出てくる量である。
(例)
タイヤが4つある車が5台あれば、タイヤは全部でいくつですか？

4個／1台　×5台　　＝20個
1あたり量　　いくつ分　全体量

＜資料④＞

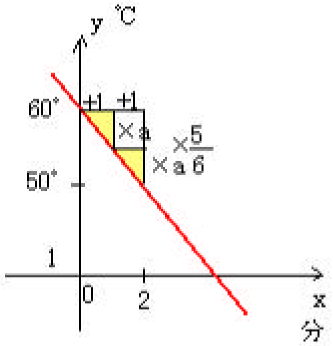
半（片）対数目盛を利用したグラフ上に書いた直線を「対数直線」と言う。これを利用して、「一定倍率変化と言う現象は、数学では指数・対数関数である」と言う視点で、導入から応用まで一貫して展開したものである。一般的な指数・対数とは趣が異なるため、教科書や参考書やテストなどにおいて戸惑うことが多々あり、そこですべてプリントによる展開となった。
最近考えるに、全部「対数直線」で通すのは無理があるので、後半のグラフの応用編として、「半対数目盛上の対数直線」を導入し、文章化された応用問題を解く道具として利用した方が良いのではないかと思う。



微分方程式　$y' = ky$ を使うような応用問題が、この「対数直線」によって解けることは興味あることだろう。

（問）冷却の法則
レストランでコーヒーを注文したら、コーヒーの温度は80℃であった。2分後に70℃に下がったが、50℃になるには、持ってきてから何分後になるでしょうか？ただし、気温は20℃であった。

最初のコーヒーの温度と部屋の温度の差は、80℃－20℃＝60℃
2分後は、70℃－20℃＝50℃
2分間に変化する倍率は、50℃÷60℃＝5／6
1分あたりの変化倍率 aは、× a× a＝5／6より、a＝√（5／6）



対数直線の式は、$y = 60 \cdot a^x$
問題の x分後には、50℃－20℃＝30℃となるから、
$30 = 60 \cdot \{\sqrt{(5/6)}\}^x$　を解けばよい。
$(0.91827)^x = 0.5$

$$x = -\frac{\log 0.5}{\log 0.91827} = 8.129$$

したがって、

約8分後

※最後の方の計算は、対数の計算でやっても、関数電卓でやっても、次の対数直線の計算の仕方でやっても良いだろう。

x→0　＋2＝2
y→60×5／6＝50

x→0　＋2　＋2＝4
y→60×5／6×5／6＝41.67

x→0　＋2　＋2　＋2＝6
y→60×5／6×5／6×5／6＝34.72

x→0　＋2　＋2　＋2　＋2＝8
y→60×5／6×5／6×5／6×5／6＝28.935

＜資料⑤＞

⑴暗号の方式いろいろ

インターネットが普及するにつれてコンピュータを使った通信が増加しています。途中で大事な情報が盗まれたり、改ざんされたりすることを防ぐために、重要なデータや情報を暗号化して通信するソフトが注目を集めています。

今までアメリカの公認の暗号は「DES」方式で、数字の入れ替えや足し算などの組み合わせた暗号化を16回も繰り返すことで解読できないようにしていました。こうした方法は暗号解読のために「かぎ」を情報の送り手と受け手がともに持っていなければなりませんでした。多くの人と情報のやり取りをしようとすると多数のかぎが必要になってきます。

これを解決したのが、「RSA」方式と呼ばれる暗号で、これは情報の受け手が1つだけ「公開かぎ」を公開し、このかぎを使って暗号を作ってもらうという方式です。暗号の解読には情報の受け手しか知らない「秘密かぎ」で解読します。こうすれば多くの人と情報のやり取りをしてもかぎは1つあれば足ります。RSAシステムのポイントは「公開かぎ」から「秘密かぎ」を抽出する方法に数学の素数を利用するのだが、「正の整数を素数同士のかけ算に書き直す素因数分解は、百桁を超えるような大きな数では極めて難しい。」というのを拠り所に作られている。最新の大型コンピュータをフル稼働させても他人が解読するには数千年もかかると言うほど難しいのである。

「DES」方式は作成しやすいが、盗まれる可能性が高い。一方、「RSA」方式は作成が大変であるが、盗まれる可能性は低い。この二つを折衷したのが、「PGP」方式である。この「PGP」方式は、暗号を「DES」方式で作成し、その「かぎ」を「RSA」方式で、暗号をかけて送るという方法である。

簡単で盗まれにくい暗号の出来上がりである。

⑵銀行不正事件

ある大都会の大きな銀行での事件である。銀行は、世界で有名なMK銀行の日本支店である。数年前からオンラインの不正操作があるという情報をつかんだ本社は、日系2世のカトー氏を調査員として送り込んできた。カトー氏が最初に目を付けたのが、営業2課の鈴木嬢である。オンラインの責任者として、入金事務を取り仕切っている人物である。カトーは不正操作情報をつかむため、鈴木嬢の部下の木村さよりに接近していった。さよりはカトーの依頼で、勤務後、鈴木嬢の目を盗んでオンライン回線のデータ保存サーバーにアクセスしてみた。しかし、パスワードがかかっていてなかなか侵入できない。仕方がないので、営業用に使っているパスワードで試してみると、平常データまではアクセスできた。鈴木嬢の個人情報の備考欄に2つの数字が書いてあったが、意味不明なために見過ごしていた。

そうこうするうちに、身近に不安を感じた鈴木嬢が姿を消した。表向きは長期勤務の慰労を兼ねた海外旅行に2週間出かけてくると言うことである。カトーは営業3課の山岡課長にも調査の手を伸ばしていた。顧客名簿一覧に不明な点がでてきた

のだ。符丁のついた名簿が多数あるが、個人の秘密を盾に山岡は公開を渋っている。秘密裏に派遣されたカトーなので、それ以上は聞き出せないままである。やはり、データー保存サーバーに入っている秘密を探るしかない。

カトーのブルックリン大学当時の友人で、東仙大学に勤務している情報工学のスペシャリストの芝木助教授に協力を仰ぐことにした。東仙大学に訪ねてきているカトーのもとに、さよりから鈴木嬢が旅行先のベッセルで自殺をしたことが伝えられた。カトーは芝木助教授を連れて急いで戻ってきてみると、鈴木嬢からさより宛に送られてきた絵葉書を見せられた。その絵葉書の下の方に、次のような謎の数字の列が記されていた。「599488945974805555」

芝木助教授はさっそく謎解きにかかった。さよりから聞いていた鈴木嬢の個人情報に書かれていた2つの数字 97と5をもとに計算を始めた。カトーはその間も、竹田営業部長や黒羽営業2課係長などからも情報を集めていた。

さて、そこでこの謎に君も挑戦してみるため、次の3つの数学を勉強して行こう。

(3)合同式の計算

合同式の計算をしてみよう。合同式とは簡単に言うと、わり算のときの余りを求めていく計算のことである。例えば、25÷7＝3…4というわり算を合同式では $25\equiv 4 \pmod 7$ と書くのである。

例1) $23\equiv 3 \pmod 5$

例2) $25\times 13\equiv 4\times 6\equiv 24\equiv 3 \pmod 7$

(4) 1次不定方程式の解法

mとrが互いに素のとき、$r\times s\equiv 1 \pmod m$ を満たすsの計算をしてみよう。これを解くために1次不定方程式を解く必要がでてくる。この解法が特殊である。

例) m＝123、r＝46は互いに素である。

$46\times s\equiv 1 \pmod{123}$ より、

$46s-123t=1$ (1次不定方程式)を解く。

小さい方の数に着目して、変形すると、$46s-(46\cdot 3-15)t=1$、$15t-46(3t-s)=1$

これを繰り返して、$15t-(15\cdot 3+1)(3t-s)=1$、$15(t-9t+3s)-(3t-s)=1$

$15(3s-8t)-(3t-s)=1$

( )の前の係数が1になったので、相手の $(3s-8t)=n$ とおくと、ただし、nは整数

$15n-(3t-s)=1$、$s-3t=1-15n$

連立方程式となるので、

$$\begin{cases} 3s-8t=n \\ s-3t=1-15n \end{cases}$$

$t=-3+46n$、$s=-8+123n$

はじめの合同式にsを代入して、

$46\times(-8+123n)\equiv 46\times(-8)\equiv 46\times 115\equiv 1 \pmod{123}$

したがって、s＝115

(5)オイラー関数φ(n)

もう一つ準備段階として、オイラー関数φ(n)＝mの計算を練習する。この関数は、2以上の整数nに対して、1からn－1までの整数のうちで、nと互いに素であるものの個数mを求める関数である。

例1) n＝10ならば、

1, 3, 7, 9の4個が10と互いに素だから、

m＝φ(10)＝4である。

オイラー関数の公式を覚えて計算すると便利である。

①素数pについて、$\varphi(p)=p-1$

$$\varphi(p^m)=p^m\left(1-\frac{1}{p}\right)$$

②p,qが互いに素のとき、

$$\varphi(pq)=\varphi(p)\times\varphi(q)$$

例2) φ(180)を求めよ。

素因数分解をして、

$180=2^2\times 3^2\times 5$

$\varphi(180)=\varphi(2^2\times 3^2\times 5)$

$=\varphi(2^2)\times\varphi(3^2)\times\varphi(5)$

$=2^2(1-\frac{1}{2})\times 3^2(1-\frac{1}{3})\times(5-1)$

$=2\times 6\times 4$

$=48$

6)芝木助教授の謎解き

上で学んだ3つの数学(合同式、1次不定方程式、オイラー関数)をもとに、芝木助教授の謎解きにつきあってもらおう。

<1>まず、鈴木嬢が個人情報に残した数字97と5は、暗号の公開鍵と考えた。

つまり、$n=97$と$r=5$である。

<2>絵葉書でさよりに送ってきたダイ・メッセージは暗号文であった。「599488945974805555」を解読するため

まず公開鍵$n=97$と$r=5$より、オイラー関数を計算して、秘密鍵を求めてみる。

$m=\varphi(n)=\varphi(97)=97-1=96$

このmは公開鍵のnが十分大きいときは素因数分解できないが、鈴木嬢の数字は可能なので助かった。

$r=5$と$m=96$は互いに素であるから、$5\times s\equiv 1 \pmod{96}$を計算すると、

1次不定方程式$5s-96t=1$を解くと、

$s=-19+96n$、したがって、$s=-19\equiv 77 \pmod{96}$ このs=77が秘密鍵となる。

97と5と77を組み合わせると、データー保存サーバーへのパスワードが見つけることが出来た。そこの表紙には次のコード表が書いてあった。

コード表

縦10の位、横1の位

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	ア	カ	サ	タ	ナ	ハ	マ	ヤ	ラ	ワ
2	イ	キ	シ	チ	ニ	ヒ	ミ	、	リ	ー
3	ウ	ク	ス	ツ	ヌ	フ	ム	ユ	ル	△
4	エ	ケ	セ	テ	ネ	ヘ	メ	。	レ	ン
5	オ	コ	ソ	ト	ノ	ホ	モ	ヨ	ロ	ヲ
6	ボ	ガ	ザ	ダ	パ	バ	ポ	3	6	9
7	ド	ギ	ジ	ヂ	ピ	ビ	0	4	7	□
8	ゾ	グ	ズ	ヅ	プ	ブ	1	5	8	
9	ゴ	ゲ	ゼ	デ	ペ	ベ	2			

＜3＞暗号文「5994889459748O5555」を前から2桁づつ取り出して、上のコード表で解読してみたが、「ヲペ8ペヲピゾホホ」となるだけでさっぱり分からない。これは計算してからやるしかない。さっそく、2桁づつ計算を始めた。

$$(59)^{s} = 59^{77} = 59^{3\times 25+2} = (59^{3})^{25}\times 59^{2} \equiv 30^{25}\times 86 \equiv 45^{5}\times 86$$

$$\equiv 78\times 86 \equiv 15 \pmod{97}$$

したがって、「59」を解読すると、「15」となる。「94」、「88」、「74」、「80」、「55」も計算してみよう。

合同式の変形が若干難しいが、時間があれば何とかなるだろう。

＜4＞「154924491513416363」となったので、上のコード表で解読してみたところ、「ハンニンハタケダダ」となり、犯人は竹田営業部長であることが分かった。鈴木嬢は罪の仮借に耐えきれず自殺したが、ダイ・メッセージとして事件の犯人を教えてくれたのである。データー保存サーバーに、不正操作の証拠はたくさん入っていたが、鈴木嬢に犯罪を命令した真犯人は分からなかったので、この暗号文は貴重なデータとなった。竹田営業部長をカトーと芝木助教授は呼び出して質したところ、犯罪を自供した。事件は一件落着である。

(7)最後に

上の暗号はnとrが小さかったので、解決したが、実際の公開鍵は下記のように膨大である。

n=114,381,625,757,888,867,669,235,779,976,146,612,010,218,296,721,242,362,562,561,842,935,706,935,245,733,897,830,597,123,563,958,705,058,989,075,147,599,290,026,879,543,541

r=9,007

＜資料⑥＞

統計は、会社に入った後、「品質管理」などの仕事があるかもしれないので、統計を少しは知っておいた方が有利であろう。

内容は、次の通りです。

(1)平均と標準偏差
(2)正規分布
(3)危険率
(4)演習
(5)期末考査（統計部分）予想問題
(6)二項分布から正規分布へ
(7)卒業考査予想問題

始めに、関数電卓等を使って、表を完成させ、平均と標準偏差を求める。

（問）
ある学年の中から、40人選んで身長を聞いたところ、下の表のようになった。この学年の身長の平均mと標準偏差σを求めよ。電卓を利用しても可。

159.0	152.9	154.4	163.3	155.1	156.6	150.5	158.6	151.2	158.2
164.9	159.0	158.5	162.4	160.7	157.2	166.0	152.8	165.0	148.5
169.6	159.2	150.4	163.7	155.5	147.2	158.3	152.0	170.0	167.2
152.6	173.6	153.2	157.0	160.7	156.0	150.3	161.9	170.2	162.3

範囲（以上/未満）	X	人数	P	XP	X^2P
145～150	147.5				
150～155	152.5				
155～160	157.5				
160～165	162.5				
165～170	167.5				
170～175	172.5				
	計	40	1		

正規分布を学んだあと、標準化と危険率について説明し、次のような問題を解かせる。

（問）
ある工場で、角棒を生産している。その角棒の辺の長さを測定したところ、平均15．0mm、標準偏差0．3mmの正規分布になった。今、新人のA君が生産した角棒の辺の長さが、15．9mmとすると、これはこの工場の製品として適しているか。5%未満の危険率で判定せよ。

この問題は、工業高生にはピッタリの問題で、就職間近な生徒は真剣に取り組んでいた。
最後に、実験回数nが大きくなると、二項分布は正規分布に近づくことから、次のような確率問題も取り組むことができた。

（問）
星野阪神が出だし好調で7試合中4勝3敗であった。この調子で今後も続くとすると、全試合（140試合）で85勝以上をあげ優勝する確率を求めよ。

＜資料⑦＞

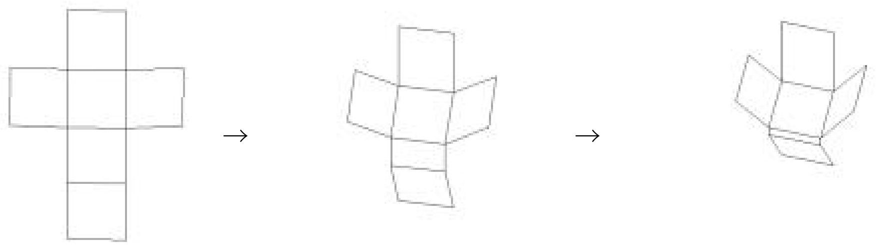
関数電卓やポケコンを利用した内容は、次の通りである。
（旧数学Ⅰ）三角比………sin、cos、tanの計算、角度を出す問題（逆三角関数$\sin^{-1}$ などを指導）、正弦、余弦の文章題
（数学Ⅱ）三角関数………sin、cos、tanの計算
　　　　指数・対数関数………計算、文章問題
　　　　微分・積分………増減表の計算、定積分の計算
（その他）統計・推計………平均、標準偏差の計算

計算力の低下を嘆いて、基礎練習をするより、関数電卓を利用して、高度な内容まで迫った方が、「高校数学」としてふさわしいような気がする。
問題は、大学進学の生徒に対しての配慮である。解き方を説明するとき、2通りの説明をした。思ったより時間はかからなかった。
基礎的な点数は取れるので、赤点続出は避けられた。普通だと、赤点は8名ぐらいいるのだが、2名ぐらいに押さえられた。事後指導もしやすくなった。
現実に工業系の就職者は、関数電卓を利用するので、将来に向けて喜ばれた。また、工業系の資格取得の中に「計算技術検定」と言うのがあるので、全員が前向きに利用していた。

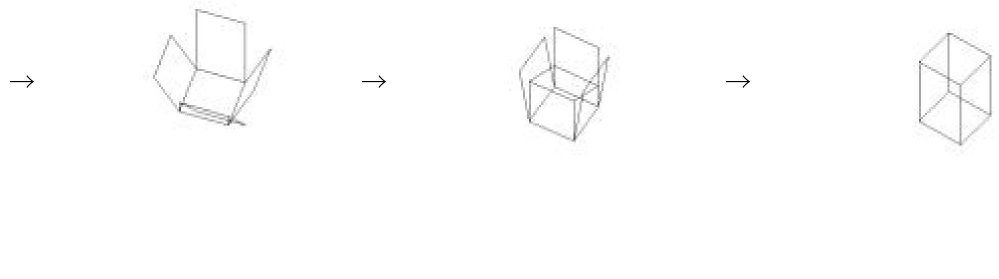
＜資料⑧＞

```
REM *** アニメ内分法
SET WINDOW -20,24,-22,22
DIM A(30),B(30),C(30),D(30)
FOR I=1 TO 22
    READ A(I),B(I)      ! データ読み込み 最初の図）
NEXT I
DATA 10,10,10,20,0,20,0,10,-10,10,-10,0,0,0,0,-10
DATA 0,-20,10,-20,10,-10,10,0,20,0,20,10,10,10
DATA 0,10,0,0,10,0,10,10,10,0,10,-10,0,-10
FOR I=1 TO 22
    READ C(I),D(I)      ! データ読み込み 最後の図）
NEXT I
DATA 12,1,12,11,5,15,5,5,5,15,0,10,0,0,0,10,5,15,12,11
DATA 7,6,7,-4,7,6,12,11,12,1,5,5,0,0,7,-4,12,1,7,-4
DATA 7,6,0,10
FOR T=0 TO 1 STEP 0.001
    CLEAR                ! 画面消去
    FOR I=1 TO 22        ! 図を描く
        PLOT LINES : T*C(I)+(1-T)*A(I),T*D(I)+(1-T)*B(I);
    NEXT I
    PLOT LINES
    FOR J=1 TO 5000      ! 時間かせぎ
    NEXT J
NEXT T
END
```

最初の図

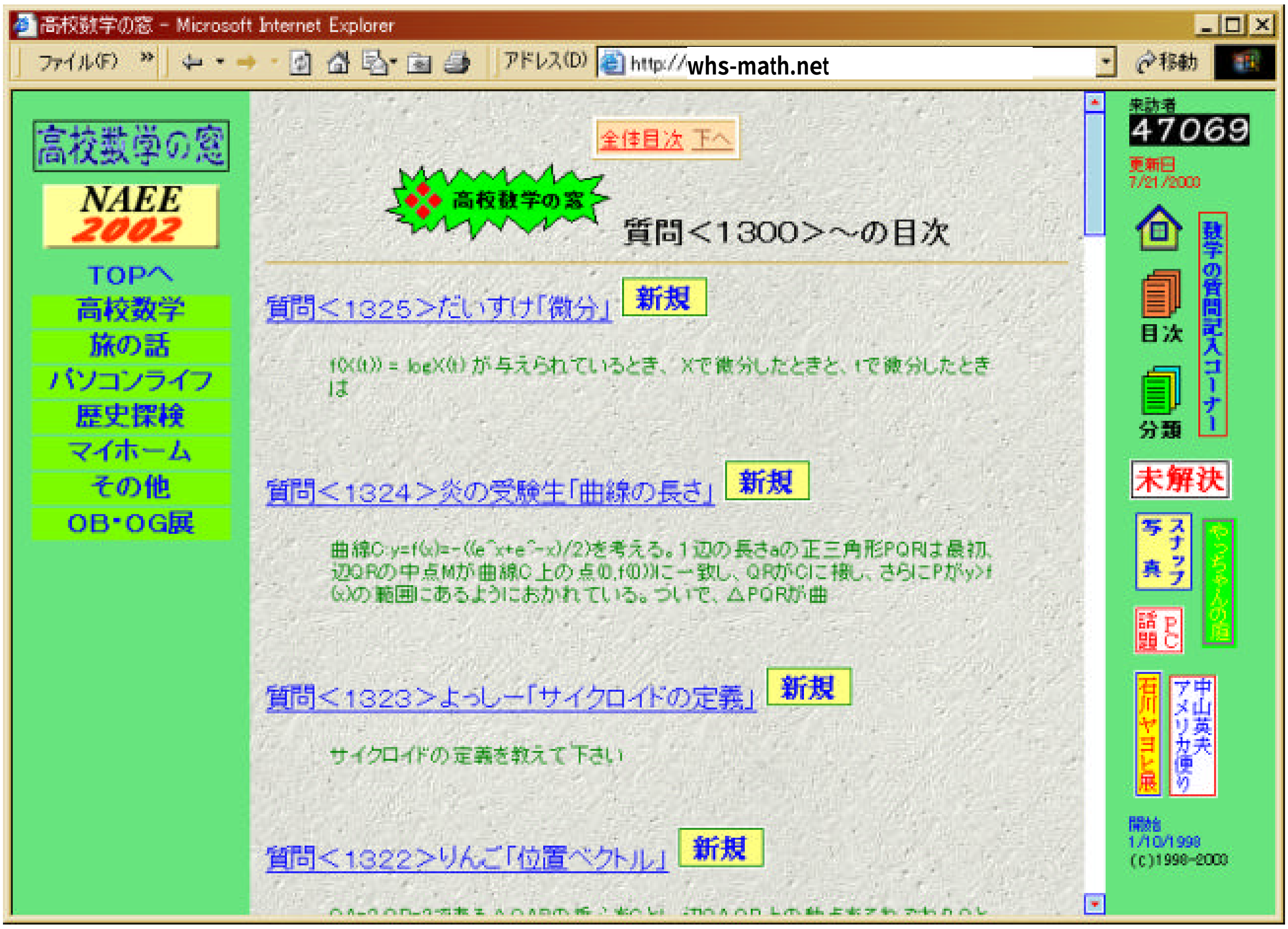


最後の図



＜資料⑨＞

高校数学の窓 - Microsoft Internet Explorer
ファイル(F)
アドレス(D) http://whs-math.net
移動
高校数学の窓
NAEE 2002
TOPへ
高校数学
旅の話
パソコンライフ
歴史探検
マイホーム
その他
OB･OG展
高校数学の窓
Windows of HighSchool's Math
(7／21)の更新内容>①juinさんから数学の質問<1303>へアドバイス
pplet and click the buttons to navigate...
来訪者
47069
更新日
7/21/2003
目次
分類
数学の質問記入コーナー
解決
写真
スナップ
話題
PC
やっちゃんの庭
石川ヤヨイ展
中山英夫アメリカ便り
開始
1/10/1998
(c)1998-2003



質問＜400＞2001／1／29
from=T. M
「有理数の連続性について」

　実数には有理数と無理数があります。この両者があってはじめて数直線上のすべての点が表現されます。逆にいうと有理数だけでは数直線上の点は飛び飛びになります。そこで、次のようなことを考えました。

　任意の有理数aと、その「次」の数b（a＜b）で、その間に有理数は存在しない）をとる。すると(a+b)/2はa＜(a+b)/2＜bを満たし、bがaの「次」であることに矛盾する。
すなわち、どんな2有理数の間にも有理数が存在し、その結果有理数は連続な点となり、有理数＝実数となるのではないか？

　ということです。もちろん、(a+b)/2のほかにもa、bが正ならその相乗平均などaとbの間に存在しうる数は無数に考えられます。また、無理数では同様のことはいえません。
無理数同士の4則演算の結果が無理数になるとは限らないからです。
　数学ではありませんが、似たような有名な話があります。的に向かってボールを投げるとまずボールは投げたところと的の中間地点に達し、その後、その中間地点と的との中間地点に達します。このことを繰り返してもボールは今あるところと、的との中間地点がいくらでもあるのだから的に近づきはするものの永遠に的には届かない、というものです。

でも実際はすぐにボールは的に届いてしまいます。一方、有理数がどんなに、その中間値があったとしても数直線は埋まりません。この違いは何なのでしょうか。
よろしくお願い致します。

お返事2001／1／31
from=武田

問1
「有理数＝実数となるのではないか？」ですが、これは濃度を考えると、異なることが分かります。濃度とは、数え上げることのできない無限集合の個数のことを指します。
自然数の濃度のことを「アレフ・ゼロ」と言い、その集合を可算集合（可附番集合）といいます。可算集合は、簡単に言うと、自然数と1対1対応で表せることを指します。
有理数の濃度が「アレフ・ゼロ」となることの証明は下のようになります。

有理数を既約分数で表し、p／qと表すと、それを対（p，q）として表し、次のように並べると、

(1，1)　(2，1)　(3，1)　(4，1)　………
　①　　②　　⑥　　⑦
(1，2)　(2，2)　(3，2)　………
　③　　⑤　　⑧
(1，3)　(2，3)　………
　④　　⑨
(1，4)　………
　⑩
………

すべての有理数が、可附番で表現できるので、自然数に1対1に対応することになり、有理数は、可算集合となり、濃度は「アレフ・ゼロ」となるわけです。

次に、実数が非可算集合（濃度を単に「アレフ」と言う）となることの証明は、カントールの対角線論法で言うことが出来ます。

実数の集合RとR（0，1）は、写像「$y=\tan\dfrac{(2x-1)\pi}{2}$」によって、1対1対応となるので、実数Rについて考えることは、R（0，1）において考えることと同じになる。
そこで、R（0，1）と自然数Nが1対1対応にならないことを証明する。
まず前提として、R（0，1）の実数は、すべて無限小数で表すことにする。例えば、0．24ならば、0．239999……とする。

初めに、R（0，1）を可算集合と仮定する。
f（1）＝0．a(11)a(12)a(13)……
f（2）＝0．a(21)a(22)a(23)……
f（3）＝0．a(31)a(32)a(33)……
………………
f（n）＝0．a(n1)a(n2)a(n3)……
………………
このようにR（0，1）に属する無限小数が可附番で、自然数と1対1
対応できるものとする。
今、0．a(11)a(22)a(33)……と対角線上の数を取っていき、
m(1)≠a(11)，m(2)≠a(22)……となるように数を取り、次のようにα
を作ると、
α＝0．m(1)m(2)m(3)……
は、α∈R（0，1）となるが、上の可附番のf（k）とは異なるもの
になるから、仮定に反することになる。
したがって、R（0，1）は非可算集合。
そして、実数も非可算集合。

結論として、有理数の濃度と実数の濃度は異なる。……（答）
※「有理数＝実数」ではない。無理数が間にたくさん挟まっている
わけである。

問２
無理数（＋）有理数＝実数
無理数（＋）有理数＝無理数
したがって、
無理数の濃度は、実数の濃度と同じ「アレフ」である。

問３
ゼノンのパラドックスである「アキレスと亀」「矢」「二分法」などが
同じ問題である。
中間を数えていくのが可附番無限集合的考えだから、いつまでたっても
的に行き着かないが、ボールが通過する直線を実数（非可算無限集合）
的考えでとらえると、連続的にボールが通過し、最終的に的に到達する
ことになる。

※今回の質問は大変勉強になりました。しかし、私自身理解が不十分な
ところもありますので、カントールの対角線論法や濃度など調べてみて
ください。（調べる中で、「集合論」と異なる「区体論」なるものがあ
ることが初めて分かりました！！感謝！！）