差分方程式について

２００５．１２．２９
武田利一(久喜工業高校)

１．差分方程式（漸化式）

私は、ちょっとだけ「数列」に興味があって、２０数年前に高橋健人著「差分方程式」（培風館・新数学シリーズ２０）を購入し勉強したことがあります。
差分方程式を場合分けしてみると、(以下、ｎ＝０，１，２，３……とする。)

$A(n+1)-A(n)=b$ ……等差数列 $A(n)=C+bn$

$A(n+1)-a\cdot A(n)=0$ ……等比数列 $A(n)=Ca^n$

$A(n+1)-a\cdot A(n)=b$ ……線形１階差分方程式

$$A(n)=Ca^n+\frac{b}{1-a}$$

$A(n+1)-a\cdot A(n)=B(n)$ ……線形１階差分方程式

$A(n)=Ca^n+U^*(n)$

ただし、$U^*(n)$ は未定係数法で求める。

（例）$A(n+1)-3A(n)=2n-1$，$A(1)=0$

$B(n)=2n-1$ の１次式だから、$U^*(n)=k_1n+k_2$

$U^*(n+1)-3U^*(n)=\{k_1(n+1)+k_2\}-3(k_1n+k_2)$
$=-2k_1n+(k_1-2k_2)$
$=B(n)$

$-2k_1=2$ より、$k_1=-1$

$k_1-2k_2=-1$ に代入して、$-1-2k_2=-1 \therefore k_2=0$

したがって、$U^*(n)=-n$

$A(n)=C3^n+(-n)$

$A(1)=0$ より、$3C-1=0 \therefore C=1/3$

したがって、$A(n)=3^{n-1}-n$

以上のように差分方程式は結構難しい。

２．線形２階差分方程式

この上を行く線形２階差分方程式は､キーワードの特性方程式を使って解くことになる。

$A(n+2)+a\cdot A(n+1)+b\cdot A(n)=0$

$A(n)=\rho^n$ とおくと、

$\rho^{n+2}+a\cdot\rho^{n+1}+b\cdot\rho^n=0$

$\rho^n(\rho^2+a\rho+b)=0$

因数分解の右側の式（特性方程式という）$\rho^2+a\rho+b=0$ を解いて、
解の公式より、

$$\rho=\frac{-a\pm\sqrt{(a^2-4b)}}{2}$$

これを ρ_1、ρ_2 とすると、

$\rho_1\neq\rho_2$ ならば、$A(n)=C_1\rho_1{}^n+C_2\rho_2{}^n$

$\rho_1=\rho_2$ ならば、$A(n)=(C_1+C_2n)\rho_1{}^n$

となる。

３．フィボナッチ数列

これを使ってフィボナッチ数列を解いてみよう。

１，１，２，３，５，８，１３，２１，３４，５５，……

$A(n+2)=A(n+1)+A(n)$，$A(1)=1$，$A(2)=1$

$A(n+2)-A(n+1)-A(n)=0$ より、
$a=-1,\ b=-1$

特性方程式 $\rho^2-\rho-1=0$ を解くと、

$$\rho=\frac{1\pm\sqrt{(1+4)}}{2}=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$$

$\rho_1\neq\rho_2$ より、

$$A(n)=C_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n+C_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

初期条件 $A(1)=1,\ A(2)=1$ より、

$$\frac{C_1+C_2}{2}+\frac{\sqrt{5}(C_1-C_2)}{2}=1$$

$$(C_1+C_2)+\sqrt{5}(C_1-C_2)=2\cdots\cdots①$$

$$\frac{3(C_1+C_2)}{2}+\frac{\sqrt{5}(C_1-C_2)}{2}=1$$

$$3(C_1+C_2)+\sqrt{5}(C_1-C_2)=2\cdots\cdots②$$

②－①より、$2(C_1+C_2)=0$
$C_1+C_2=0\cdots\cdots③$

①×３－②より、$2\sqrt{5}(C_1-C_2)=4$
$C_1-C_2=2/\sqrt{5}\cdots\cdots④$

③＋④より、
$2C_1=2/\sqrt{5}$
$\therefore C_1=1/\sqrt{5}$

③より、
$\therefore C_2=-1/\sqrt{5}$

したがって、

$$A(n)=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\cdots\cdots(\text{答})$$

４．線形２階差分方程式その２

（例）$f(n+2)+f(n+1)-12f(n)=20,\ f(0)=1, f(1)=2$ を満たす解 $f(n)$ を求めよ。

（１）$f(n)=c$ とおき、特殊解を求める。
$c+c-12c=20$
$\therefore c=-2$

（２）$f(n+2)+f(n+1)-12f(n)=0$ として、一般解を求める。
$f(n)=\rho^n$ とおくと
$\rho^{n+2}+\rho^{n+1}-12\rho^n=0$
$\rho^n(\rho^2+\rho-12)=0$
$\rho^n>0$ より、$\rho^2+\rho-12=0$（特性方程式という）
$(\rho+4)(\rho-3)=0$
$\therefore \rho=-4,\ 3$
したがって、
$f(n)=C_1(-4)^n+C_2 3^n$

（３）一般解＋特殊解より、
$f(n)=C_1(-4)^n+C_2 3^n-2$
$f(0)=1$ より、$C_1+C_2-2=1$ ………①
$f(1)=2$ より、$-4C_1+3C_2-2=2$ ………②

①×３－②

$$
\begin{array}{lrcl}
 & 3C_1 + 3C_2 & = & 9 \\
-) & -4C_1 + 3C_2 & = & 4 \\
\hline
 & 7C_1 & = & 5
\end{array}
$$

$\therefore C_1 = 5/7$………③

③を①に代入して、

$5/7 + C_2 = 3 \quad \therefore C_2 = 16/7$

したがって、

$$f(n) = \frac{5}{7}(-4)^n + \frac{16}{7}(3)^n - 2 \quad \text{……（答）}$$

５．漸化式と極限値

（例１）漸化式$A(n+1)=\sqrt{A(n)+2}$，$A(1)=C$，$n=1, 2, 3\cdots\cdots$
ただし，Cは$C \geqq -2$をみたす定数とする。$\lim_{n\to\infty} A(n)$を求めよ。

この問題のように、その一般項$A(n)$を求めることは簡単ではないが、その極限値を求めることはできる。
（以下、下鳥氏の解説。途中の補足は私）

まず、極限値があるか、ないかを確かめます。もし、極限値が存在すると確認できているなら、$\lim_{n\to\infty} A(n+1)=\lim_{n\to\infty} A(n)=\alpha$だから、$\alpha=\sqrt{\alpha+2}$を解けば、極限値が求められます。

では、極限値が存在するかわからない場合は、１つは一般項$A(n)$を求めてから、$n\to\infty$とすれば良いですね。しかし、一般項が具体的に求められなくても不等式による評価で極限値を求められるものもあるということです。（しかし、上で述べたようにある程度極限値の存在を確認した上で以下の不等式を作っているので、その辺は頭の中で考えている順序と解答は逆になっていて、初めて解答を見ると不思議な気がするものになります。その辺は早く慣れてしまって下さい）

（補足）
$\alpha=\sqrt{\alpha+2}$を解いて、$\alpha^2-\alpha-2=0 \therefore \alpha=2, -1$
$A(1)=C$（$C\geqq -2$をみたす定数）より、
$n>2$のとき、$A(n)>0$
したがって、$\alpha>0$より、$\alpha=2$
そこで本当に２が極限値になるかは、変形によって確認するわけですが、そのとき、「引く２（αの数値）」とおくのがコツなのです。
$\lim_{n\to\infty} A(n)=2 \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} |A(n)-2|=0$
（補足終わり）

$A(n+1)-2=\sqrt{A(n)+2}-2$
ここで、分母分子に$\sqrt{A(n)+2}+2$を掛けると

$$=\{A(n)+2-4\}/[\sqrt{A(n)+2}+2]$$
$$=\{A(n)-2\}/[\sqrt{A(n)+2}+2]$$

$\sqrt{A(n)+2}+2 \geqq 2$より

$$\leqq \{A(n)-2\}/2$$

よって、
$$
\begin{aligned}
A(n)-2 &\leqq \{A(n-1)-2\}/2 \\
&\leqq \{A(n-2)-2\}/2^2 \\
&\leqq \{A(n-3)-2\}/2^3 \\
&\quad \cdots\cdots \\
&\leqq \{A(1)-2\}/2^{n-1}
\end{aligned}
$$

よって、$n\to\infty$とすると。右辺$\to 0$
すなわち、$A(n)-2\to 0$
$\therefore \lim_{n\to\infty} A(n)=2$　となる。
上の不等式は普通絶対値を付けて書くことが多いです。

極限値の存在を確認せずαを求めようとすると
例えば、$A(n+1)=2A(n)+1$,$a(1)=1$のような数列は、∞に発散するのもかかわらず、$\alpha=2\alpha+1$を解くと、$\alpha=-1$となるので注意です。

（例２）数列$\{A(n)\}$が、$A(n+1)=\{A(n)+A(n-1)\}/2$　（$n = 1,2,3,\ldots$）をみたすとき、$\lim_{n\to\infty} A(n)$を求めよ。

この問題は、一般項$A(n)$が線形２階差分方程式の解法により求められる。
$2A(n+1)-A(n)-A(n-1)=0$より、$A(n)=\rho^n$とおくと、
$2\rho^{n+1}-\rho^n-\rho^{n-1}=0$
$\rho^{n-1}(2\rho^2-\rho-1)=0$
特性方程式より、$(2\rho+1)(\rho-1)=0 \therefore \rho=1, -1/2$
$A(n)=C_1(1)^n+C_2(-1/2)^n$
$\quad =C_1+C_2(-1/2)^n$
$A(0)=C_1+C_2$ ………①
$A(1)=C_1+C_2(-1/2)$………②
①－②より、
$A(0)-A(1)=(3/2)C_2 \quad \therefore C_2=(2/3)\{A(0)-A(1)\}$
①より、$A(0)=C_1+(2/3)\{A(0)-A(1)\}$
$\therefore C_1=(1/3)A(0)+(2/3)A(1)$
$A(n)=\{(1/3)A(0)+(2/3)A(1)\}+(2/3)\{A(0)-A(1)\}(-1/2)^n$
$\lim_{n\to\infty} A(n)=(1/3)A(0)+(2/3)A(1)$……（答）

６．対数を用いる漸化式の解法

（例）$A(1)=27$，$A(n+1)=(1/3)A(n)^2$ を解け。
このような問題のときは、両辺に対数をとると良い。係数（１／３）より、底を３とする。
$\log_3 A(n+1)=\log_3 (1/3)A(n)^2$
$\quad =2\log_3 A(n)-1$
$B(n)=\log_3 A(n)$とおくと、
$B(n+1)=2B(n)-1 \therefore B(n)=C2^n+1$
$B(1)=\log_3 A(1)=\log_3 27=3$より、
$C2+1=3 \therefore C=1$
$B(n)=2^n+1$
$\log_3 A(n)=2^n+1$
$A(n)=3$^（2^n+1）……（答）

７．３項間漸化式の特性方程式が虚数解のとき

$A(n+2)+A(n+1)+A(n)=0$において、$A(1)$と$A(2)$が整数であれば、一般項$A(n)$も整数となります。$A(n+2)+A(n+1)+A(n)=0$を変形して、$A(n+2)=-A(n+1)-A(n)$より、明らかです。

ここでは、一般項からトライしてみよう。この線形２階差分方程式（３項間漸化式のこと）の特性方程式は、$\rho^2+\rho+1=0$なので、解は

$$\rho=\frac{-1\pm i\sqrt{3}}{2}$$

という虚数（複素数）となる。

そこで、この２つの複素数は共役複素数だから、極形式に直すと、
$\rho_1=r(\cos\theta+i\sin\theta)=\cos 120°+i\sin 120°$
$\rho_2=r(\cos\theta-i\sin\theta)=\cos 120°-i\sin 120°$

一般項は次のようになる。
$A(n)=C_1\rho_1^n+C_2\rho_2^n$
$\quad =C_1(\cos 120°n+i\sin 120°n)+C_2(\cos 120°n-i\sin 120°n)$
$\quad =(C_1+C_2)\cos 120°n+i(C_1-C_2)\sin 120°n$

C_1とC_2は任意定数だから、まとめて
$(C_1+C_2)=A$、$i(C_1-C_2)=B$とおくと、
$A(n)=A\cos 120°n+B\sin 120°n$

$A(1)$、$A(2)$は整数だから、
$A(1)=A\cos 120°+B\sin 120°$

$$=-\frac{1}{2}A+\frac{\sqrt{3}}{2}B$$

例えば、$A=2$、$B=2\sqrt{3}$とすると、$A(1)=-1+3=2$（整数となる）
第２項以降も同様にして、

$A(2) = A\cos 240° + B\sin 240°$

$$= -\frac{1}{2}A - \frac{\sqrt{3}}{2}B$$

$= -1 - 3 = -4$（整数となる）

$A(3) = A\cos 360° + B\sin 360°$
$= 2$

$A(4) = A\cos 480° + B\sin 480°$
$= -1 + 3 = 2$

したがって、この例では、一般項は
$A(n) = 2 \cdot \cos 120° n + 2\sqrt{3} \cdot \sin 120° n$
となる。
したがって、この例の数列は、
２，－４，２，２，－４，２，２，……
となる。この数列は、
$A(n+2) + A(n+1) + A(n) = 0$ となるので、
正しい例であることが分かる。
すべての項は整数となる。

$A = 4$、$B = 2\sqrt{3}$ とすると、
１，－５，４，１，－５，４，１，……

８．特性方程式がない場合

漸化式の特性方程式と行列の固有方程式は同じものですが、これが成り立つのは、もとの式が、「線形性」を持っているかどうかによります。線形性とは、次のような性質が成り立つ作用素のときに言える事柄です。

数列の時の作用素（差分Δ）では、$\Delta\{aA(n+1)+bA(n)\}=a\Delta A(n+1)+b\Delta A(n)$
となるか？
微分の時の作用素（d/dx）では、$(d/dx)\{af(x)+bg(x)\} = a(d/dx)f(x)+b(d/dx)g(x)$
となるかどうか？

（例１）漸化式 $A(n+1)=(\sin A_n - 1)$ $(n \geqq 1)$　$A_1=a$　のときは、作用素（差分）が線形性をもたないので、特性方程式は無いと考えた方がいいと思います。したがって、一般項を求めることは難しい。

作用素（差分）の線形性を考えると、
$A(n+1)-\sin A(n)+1=0$ より、
$\Delta\{A(n+1)-\sin A(n)+1\}=\{A(n+2)-\sin A(n+1)+1\}-\{A(n+1)-\sin A(n)+1\}$
$=\Delta A(n+1)-\Delta \sin A(n)+\Delta 1$
$\neq \Delta A(n+1)-\sin \Delta A(n)+\Delta 1$
したがって、線形性はもたない。

（例２）線形性を持つ漸化式（線形３階差分方程式）の例で考えてみよう。
$A(n+3)-2A(n+2)-A(n+1)+2A(n)=0$ とすると、
ただし、$A(1)=1, A(2)=2, A(3)=3$ とする。
$A(n)=\rho^n$　とおくと、

$\rho^{n+3} - 2\rho^{n+2} - \rho^{n+1} + 2\rho^n = 0$

$\rho^n(\underbrace{\rho^3 - 2\rho^2 - \rho + 2}) = 0$
↑これを特性方程式という。
（特性方程式は、整式の形をしている。）

因数分解をして、
$(\rho-1)(\rho+1)(\rho-2)=0$
$\therefore \rho = -1, 1, 2$

一般項は、

$$A(n)=C_1(-1)^n+C_2 1^n+C_3 2^n$$
$$=C_1(-1)^n+C_2+C_3\cdot 2^n$$

これに、$A(1)=1, A(2)=2, A(3)=3$ を代入して、C_1, C_2, C_3 を求めて、

$$A(n)=\frac{1}{6}(-1)^n+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\cdot 2^n$$

$$=\frac{1}{6}\{2^{n+1}+(-1)^n+3\} \cdots\cdots\cdots \text{(答)}$$

（例３）$A(n+1)=A(n)^2-2$ のときは、線形性が示せないので、特性方程式が求められないので、一般項を求めることは難しい。

$\Delta\{A(n+1)-A(n)^2+2\}=\Delta A(n+1)-\{\Delta A(n)\}^2+\Delta 2$
となれば線型性があるわけですが、残念ながら$\Delta A(n+1)-\Delta\{A(n)\}^2+\Delta 2$
としかなりませんね。
つまり、$\{\Delta A(n)\}^2=\{A(n+1)-A(n)\}^2$
$\Delta\{A(n)\}^2=\{A(n+1)\}^2-\{A(n)\}^2$
とちょっと違うわけです。この場合も線形性を持ちませんから特性方程式はありません。

９．トリボナッチ数列の一般項

「水の流れ」さん（ニックネーム）から次のような質問が来ました。
（例）次のような漸化式で表される数列の一般項を求めてください。
$f(1)=1,\ f(2)=1,\ f(3)=2$、
$f(n+3)=f(n+2)+f(n+1)+f(n)$

これは、<バスケットボール競技の得点経過>
今、私はバスケットボールの顧問をしています。競技での得点はフリースローは１点、フィールドスローは７m以内は２点、７m以上は３点として加算されていきます。そこで、試合中スコアブックをみると、時間と得点経過が示されていました。
ｎ点になるまでの得点経過はを$T(n)$とするとき、数列$T(n)$の漸化式はどうなるでしょうか。

<駒の動き方>
下の図のような碁盤のますの中に、最初一番左下に駒があり、その座標（０，０）です。この駒は右、上、斜め上と３通りの方法で１ますづつ動くことができます。図の一番右上のますの座標（m、ｎ）までたどり着く経路は何とおりですか。

<大相撲の星取り表>
大相撲の本場所で、３連敗しない方法（２連敗まで許される）勝ち負けの起こり方は１，２，３，４,・・１５日目ではどんな数列になるでしょう。

以上のような具体例にもでてくるそうで、トリボナッチ数列と命名したそうです。
これは、特性方程式の解がポイントのようです。
さて、質問の３階差分方程式ですが、
$f(1)=1,\ f(2)=1,\ f(3)=2$、
$f(n+3)=f(n+2)+f(n+1)+f(n)$ より、
特性方程式は$\rho^3-\rho^2-\rho-1=0$を解くと、
$\alpha=\sqrt[3]{(19+3\sqrt{33})/27}$
$\beta=\sqrt[3]{(19-3\sqrt{33})/27}$
$\omega=(-1+\sqrt{3}i)/2$
$\omega^2=(-1-\sqrt{3}i)/2$
より、
$\rho_1=\alpha+\beta+1/3$
$\rho_2=\alpha\omega+\beta\omega^2+1/3$

$\rho_3=\alpha\omega^2+\beta\omega+1/3$
が特性方程式の３つの解となります。ρ_1は実数解、ρ_2とρ_3は複素数解です。

複素数解は極形式に直せる。さらに、共役な複素数になるので、
$\rho_2=r(\cos\theta+i\sin\theta)$
$\rho_3=r(\cos\theta-i\sin\theta)$
ただし、
$r^2=1/36\cdot(3\alpha+3\beta-2)^2+3/4\cdot(\alpha-\beta)^2$
$\theta=\cos^{-1}\{(-1/2\cdot\alpha-1/2\cdot\beta+1/3)/r\}$

したがって
$f(n)=C_1(\rho_1)^n+C_2(\rho_2)^n+C_3(\rho_3)^n$
$(\rho_2)^n=r^n(\cos n\theta+i\sin n\theta)$
$(\rho_3)^n=r^n(\cos n\theta-i\sin n\theta)$
$f(n)=C_1(\rho_1)^n+C_2r^n(\cos n\theta+i\sin n\theta)+C_3r^n(\cos n\theta-i\sin n\theta)$
$\quad=C_1(\rho_1)^n+r^n(C_2\cos n\theta+C_2 i\sin n\theta+C_3\cos n\theta-C_3 i\sin n\theta)$
$\quad=C_1(\rho_1)^n+r^n\{(C_2+C_3)\cos n\theta+(C_2 i-C_3 i)\sin n\theta\}$
$A_1=C_1$、$A_2=C_2+C_3$、$A_3=C_2 i-C_3 i$とおくと、
$f(n)=A_1(\rho_1)^n+r^n\{A_2\cos(n\theta)+A_3\sin(n\theta)\}$

初期条件より、A_1、A_2、A_3を求める。しかし、近似値でしか求められない。

１０．分数式の漸化式の一般項

（例）分数式の漸化式
$A(1)=4\quad A(n+1)=\{4A(n)+8\}/\{A(n)+6\}\quad(n=1,2,3\cdots)$

$\lim A(n+1)=\lim A(n)=\alpha$とおくと、$\alpha=(4\alpha+8)/(\alpha+6)$
$\alpha(\alpha+6)=(4\alpha+8)$より、$\alpha^2+2\alpha-8=0$
$(\alpha+4)(\alpha-2)=0\therefore\alpha=-4,\ 2$
$\alpha=-4$のとき、

$$A(n+1)+4=\frac{4\{A(n)+4\}-8}{\{A(n)+4\}+2}+4$$

$$=\frac{4\{A(n)+4\}-8+4\{A(n)+4\}+8}{\{A(n)+4\}+2}$$

$$=\frac{8\{A(n)+4\}}{\{A(n)+4\}+2}$$

$B(n)=\{A(n)+4\}$とおくと、

$$B(n+1)=\frac{8B(n)}{B(n)+2}$$

逆にして、

$$\frac{1}{B(n+1)}=\frac{B(n)+2}{8B(n)}=\frac{1}{8}+\frac{1}{4B(n)}$$

$$\frac{1}{B(n+1)}-\frac{1}{4B(n)}=\frac{1}{8}$$

$C(n)=1/B(n)$とおくと、
$C(n+1)-(1/4)C(n)=(1/8)$

$\therefore C(n)=k(1/4)^n+(1/6)$
初期条件$A(1)=4$より、$B(1)=8$、$C(1)=1/8$
$k(1/4)^1+(1/6)=1/8$
$k(1/4)=(-1/24)$
$\therefore k=-1/6$

$C(n)=(-1/6)(1/4)^n+(1/6)=(1/6)\{1-(1/4)^n\}$
$C(n)=1/B(n)$より、
$B(n)=6\cdot 4^n/(4^n-1)$
$B(n)=\{A(n)+4\}$より、
$\therefore A(n)=6\cdot 4^n/(4^n-1)-4$

$$=\frac{6\cdot 4^n-4(4^n-1)}{4^n-1}$$

$$=\frac{2\cdot 4^n+4}{4^n-1}\quad \cdots\cdots(答)$$

$\alpha=2$のとき、

$$A(n+1)-2=\frac{4\{A(n)-2\}+16}{\{A(n)-2\}+8}-2$$

$$=\frac{4\{A(n)-2\}+16-2\{A(n)-2\}-16}{\{A(n)-2\}+8}$$

$$=\frac{2\{A(n)-2\}}{\{A(n)-2\}+8}$$

$B(n)=\{A(n)-2\}$とおくと、

$$B(n+1)=\frac{2B(n)}{B(n)+8}$$

逆にして、

$$\frac{1}{B(n+1)}=\frac{B(n)+8}{2B(n)}=\frac{1}{2}+\frac{4}{B(n)}$$

$$\frac{1}{B(n+1)}-\frac{4}{B(n)}=\frac{1}{2}$$

$C(n)=1/B(n)$とおくと、
$C(n+1)-4C(n)=(1/2)$

$\therefore C(n)=k(4)^n-(1/6)$
初期条件$A(1)=4$より、$B(1)=2$、$C(1)=1/2$
$k(4)^1-(1/6)=1/2$
$k(4)=(2/3)$
$\therefore k=1/6$
$C(n)=(1/6)(4)^n-(1/6)=(1/6)\{(4)^n-1\}$
$C(n)=1/B(n)$より、
$B(n)=6/(4^n-1)$
$B(n)=\{A(n)-2\}$より、
$\therefore A(n)=6/(4^n-1)+2$

$$=\frac{6+2\cdot 4^n-2}{4^n-1}$$

$$=\frac{2\cdot 4^n+4}{4^n-1}\quad \cdots\cdots(答)$$

αは-4でも2でも、どちらでやっても答えは出てくる。

（別解１）飯島光治氏よりのアドバイス

私が紹介するのは、「大学への数学」今月号(1999.9)の特集に載っていた方法（「αβ法」と呼ぶことにしよう）です。分数式の漸化式を解くときに、まず

$$b_{n+1}=\frac{a_{n+1}+\alpha}{a_{n+1}+\beta}$$

とおき、与式 a_{n+1} を代入する。この置き方が特徴である。
難問の方がα≠βとなるので、解けるのです。

$$b_{n+1}=\frac{\dfrac{4a_n+8}{a_n+6}+\alpha}{\dfrac{4a_n+8}{a_n+6}+\beta}$$

分母と分子に a_n+6 を掛けて、

$$b_{n+1}=\frac{4a_n+8+\alpha(a_n+6)}{4a_n+8+\beta(a_n+6)}$$

$$=\frac{(4+\alpha)a_n+8+6\alpha}{(4+\beta)a_n+8+6\beta}$$

$$=\frac{(4+\alpha)}{(4+\beta)}\cdot\frac{a_n+(8+6\alpha)/(4+\alpha)}{a_n+(8+6\beta)/(4+\beta)}$$

$$b_{n+1}=\frac{4+\alpha}{4+\beta}\cdot b_n$$

となるためには、$\alpha=(8+6\alpha)/(4+\alpha)$
βの場合でも同じである。そこで、xとおき計算すると、$x(4+x)=8+6x$
$x^2-2x-8=0$ という２次方程式が出てくる。
因数分解して、$(x-4)(x+2)=0$
$\therefore x=4,\ -2$
これは、「特性方程式法」の４を加えるか２を引くと同じになっている。
$\alpha=4$、$\beta=-2$ とおく。逆でも同じ結果になる。

$$b_{n+1}=\frac{8}{2}\cdot b_n=4b_n$$

b_n は等比数列になる。どうやら「αβ法」は b_n
数列が等比数列になるのに向いているようだ。
公比は４で、
$a_1=4$ より、

$$b_1=\frac{a_1+\alpha}{a_1+\beta}=\frac{4+4}{4-2}=\frac{8}{2}=4$$

初項は４なので、
$b_n=4\cdot 4^{n-1}=4^n$

したがって、

$$b_n=\frac{a_n+\alpha}{a_n+\beta}$$ より、

$$4^n=\frac{a_n+4}{a_n-2}$$

$$4^n(a_n-2)=a_n+4$$

$$(4^n-1)a_n=2\cdot4^n+4$$

$$\therefore\ a_n=\frac{2\cdot4^n+4}{4^n-1}\quad\cdots\cdots（答）$$

（別解２）村嶋健吾氏よりのアドバイス

この問題は１次変換です。

$A_{n+1}=(4A_n+8)/(A_n+6)$は、$w=(4z+8)/(z+6)$と書き直します。

１次変換$w=(az+b)/(cz+d)$（$c\neq0$）について次の定理が成り立つ。

＜１＞不動点が１個のとき、不動点をξ_1とすると、

$$\frac{1}{w-\xi_1}=\frac{1}{z-\xi_1}+k$$

＜２＞不動点が２個のとき、不動点をξ_1、ξ_2とすると、

$$\frac{w-\xi_1}{w-\xi_2}=k\cdot\frac{z-\xi_1}{z-\xi_2}$$

この問題（大学入試でしょう）を作った大学の先生は、複素関数論の教科書の例題等から、考え出したのでしょう。

不動点を求めると、$z=(4z+8)/(z+6)$

$(z-2)(z+4)=0$より、定理＜２＞が使える。

$\xi_1=-4$、$\xi_2=2$

計算すると、（飯島先生のやり方と同じで）$k=4$

$$\frac{w+4}{w-2}=4\cdot\frac{z+4}{z-2}$$

したがって、

$$\frac{a_{n+1}+4}{a_{n+1}-2}=4\cdot\frac{a_n+4}{a_n-2}$$

となる。

数列

$$\left\{\frac{a_n+4}{a_n-2}\right\}$$ は等比数列である。

$$\frac{a_n+4}{a_n-2}=4\cdot4^{n-1}=4^n$$

$a_n+4=4^n\cdot(a_n-2)$

$\therefore a_n=(2\cdot4^n+4)/(4^n-1)$

統一的なやり方で　できないかと考えたのが、以下の方法です。

$w=(4z+8)/(z+6)$

を１次変換

$$\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&8\\1&6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$

に対応させる。

行列の特性方程式

$$\begin{vmatrix}\lambda-4&-8\\-1&\lambda-6\end{vmatrix}=0$$ を解くと、

$(\lambda-4)(\lambda-6)-(-1)(-8)=0$

$\lambda^2-10\lambda+16=0$

$(\lambda-2)(\lambda-8)=0$

$\therefore\lambda=2,\ 8$（固有値）

==========補足説明================================

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}$$

λ=2 に対する固有ベクトルを,(A-λ I)v = 0 から求めます。
ここに I は単位行列です。

$$\begin{pmatrix} 4-2 & 8 \\ 1 & 6-2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

これより
x+4y=0
固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

のスカラー倍です。

同様に、
λ=8 に対する固有ベクトルは,

$$\begin{pmatrix} 4-8 & 8 \\ 1 & 6-8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

より
x-2y=0
固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

のスカラー倍です。

いま求めた 2 つの固有ベクトル(縦ベクトル)を横に並べて

$$P = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

==========補足説明終わり================================

これに対応する固有ベクトルを $\begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ として、

$P = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ とおく。$A = \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}$ に対して

$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$ となる。(対角化)

両辺をn－1乗すると、

$$(P^{-1}AP)^{n-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}^{n-1}$$

$$P^{-1}A^{n-1}P = \begin{pmatrix} 2^{n-1} & 0 \\ 0 & 8^{n-1} \end{pmatrix}$$

$$\therefore A^{n-1} = P\begin{pmatrix} 2^{n-1} & 0 \\ 0 & 8^{n-1} \end{pmatrix}P^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} 2/3 \cdot 2^{n-1} + 1/3 \cdot 8^{n-1} & -4/3 \cdot 2^{n-1} + 4/3 \cdot 8^{n-1} \\ -1/6 \cdot 2^{n-1} + 1/6 \cdot 8^{n-1} & 1/3 \cdot 2^{n-1} + 2/3 \cdot 8^{n-1} \end{pmatrix}$$

初項 4＝4/1 と考えて、$x_1 = 4$、$y_1 = 1$

$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = A^{n-1}\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ を書き下して、

$$\begin{cases} x_n = 4/3 \cdot 2^{n-1} + 8/3 \cdot 8^{n-1} & \text{(分子)} \\ y_n = -1/3 \cdot 2^{n-1} + 4/3 \cdot 8^{n-1} & \text{(分母)} \end{cases}$$

$$\therefore a_n = x_n / y_n$$
$$= (2 \cdot 4^n + 4) / (4^n - 1)$$

１１．最後に

以上のように、私のホームページ「高校数学の窓」に寄せられた「漸化式（差分方程式）」についての質問や回答を、この機会にまとめてみた。まとめてみると、なかなか読み応えのあるレポートになったと思っている。これらを基礎に更に差分方程式に挑戦していきたいものである。