

# 「高校での内包量 Ver.07.8.18」

埼玉県立久喜工業高等学校・武田利一

## 0. はじめに

「数学」は初め、自然などに含まれている「量」を抽出し、その相互関係を分析する中で未知のものを知る道具として発達してきた。そう言う意味で「物理（自然現象を解明する学問）」と一体と言って良いだろう。

その後、方程式が生まれ、座標が誕生し、微分・積分が研究され、一方、幾何学や数論なども独自の発展を見せている。

明治時代になって、日本の国内では、日本の教育力をどう高めるかと言う課題が生まれ、ドイツのクロネッカーの元に留学した藤沢利喜太郎(注1)によって「黒表紙（当時の国定教科書）」が作られ、その後の日本の「数学教育」の基礎を築いたと言えるだろう。

クロネッカーは当時一般に行われていた数学研究の方法から離れ、「量を無視し、純粹に数だけを取り出して、その相互関係から数学を研究する」と言う画期的な手法を編み出し、当時の第一人者と言われる数学者であった。しかし、これはあくまで一つの手法に過ぎなかったのにもかかわらず、藤沢利喜太郎は日本の初等数学教育にこの考え方を持ち込んだ結果、「量」を軽視した数学教育が誕生してしまったのである。

## 1. 外延量がいえんりょうと内包量ないほうりょうとは

液量、長さ、面積、体積と容積、重さ、時間、モーメントなど、ものの「存在の規模や広がり」を表す量（第1次的な量）を外延量と言い、加法性をもつ点がその特徴である。また、内包量とは、2つの外延量の相互関係によって決まり、「ある性質の強さ・程度」を表す量（第2次的な量）のことである。「1あたりの量」「単位あたり量」とも一般に呼ばれている。

密度や流量、勾配や速度などの内包量は社会生活の中にも自然界にも無数に存在しており、次の表に見られるように四種類に分類できる。

【内包量の分類】(注2)

分母 \ 分子	分布量	位差量
空間的な量	密度 (A)	勾配 (B)
時間	流量 (C)	速度 (D)

上記の表による内包量の分類の後、内包量の指導順について小学校では実践が繰り返されてきたが、現在のところ次の手順が考えられる。全体で20時間ぐらいの展開である。

【内包量の指導手順】(注3)

	第1種	第2種	第3種
A <sub>1</sub>	金属密度 (6h) 人口密度 (2h)	収穫度、単価	散布度
A <sub>2</sub>	濃度 (4h)		
C	仕事量 (2h)	流量	ガソリン消費量
D	速度 (6h)		

## 2. 内包量と微積分

人間で例えると、外延量は「体」で、内包量は「心」にあたると思う。高校数学に「量」を持ち込むこと自体は画期的ではあるけれども、外延量だけ入れて終わるのではなく、内包量も導入していくことが大事だと思う。この両者が入ること、その数学自体の本当の理解へとつながっていくことだろう。さらに、高校数学における微積分との関連も見えてくる。

【内包量と微積分の関連】(注4)

x \ y	分布型	位差型	
空間型	密度 (A)	勾配 (B)	場
時間型	流量 (C)	速度 (D)	時系列
	積分	微分	
	(第2用法) $ax = y$	(第1用法) $y / x = a$	
	スカラー量	ベクトル量	

### 3. 「工業数理」に出てくる量

連続量÷連続量ということから、「単位あたり量」が出てくるが、これが内包量の理解につながるので、「単位がわかると物理がわかる」という本(注5)を読んでみた。そこに書いてある多種多様な量を見るにつけ、工業高校で勉強する「工業数理」の教科書にそれらがどの程度出てくるのか分析してみる気持ちが起った。  
そこで、勤務している工業高校の「工業数理」の教科書(注6)をもらって調べていくと、確かにたくさんの量が登場してくる。そこで、それらを外延量と内包量に分けながら一覧表を作ってみた。

#### 【工業数理に出てくる量の分類】

印は「度」系の内包量、 印は「率」系の内包量(注7)

工業数理基礎	量	演算	量	演算結果の量
カーナビ	GPS衛星と車の距離(km)	÷	電波の到達時間(s)	電波の速さ(km/s)
ピラミッドの底面積	長さ(m)	×	長さ(m)	面積(m <sup>2</sup> )
パルテノン神殿の黄金比	正面図の横の長さ(cm)	÷	正面図の縦の長さ(cm)	黄金比(1.618)
紙のサイズ	横の長さ(mm)	÷	縦の長さ(mm)	A4サイズ(比 $\frac{1}{\sqrt{2}}$ )
建ぺい率	建築面積(m <sup>2</sup> )	÷	敷地面積(m <sup>2</sup> )	建ぺい率(%)
方眼紙を利用した面積	縮尺地図の面積(km <sup>2</sup> )	÷	正方形の個数(個)	縮尺正方形の面積(km <sup>2</sup> /個)
加工部品の体積	底面積(cm <sup>2</sup> )	×	高さ(cm)	体積(cm <sup>3</sup> )
自動車の速さ	走行距離(km)	÷	走行時間(h)	自動車の速さ(km/h)
電流と電圧	電圧(V)	÷	抵抗(R)	電流(I=V/R)
校舎の高さ	校舎の高さ(m)	÷	校舎までの距離(m)	三角比(tan)
物体の加速度	速さの変化(m/s)	÷	時間(s)	加速度(m/s <sup>2</sup> )
密度と質量	質量(kg)	÷	体積(m <sup>3</sup> )	密度(kg/m <sup>3</sup> )
力	質量(kg)	×	加速度(m/s <sup>2</sup> )	力(N=kgm/s <sup>2</sup> )
圧力・応力	面に働く力(N)	÷	断面積(m <sup>2</sup> )	圧力(Pa=N/m <sup>2</sup> )
仕事	一定の力の大きさ(N)	×	移動した距離(m)	仕事(J=Nm)
仕事率	仕事(J)	÷	時間(s)	仕事率(W=J/s)
電力	電圧(V)	×	電流(I)	電力(W=VI)
電力量	電力(W)	×	時間(s)	電力量(J=Ws)
運動エネルギー	質量(kg)	×	速度(m/s)	運動エネルギー(J=kgm <sup>2</sup> /s <sup>2</sup> )
位置エネルギー	質量(kg)	×	高さ(m)	位置エネルギー(J=kgm/s)
速さ-時間線図	速さ(km/h)	×	時間(h)	走行距離(km)
円運動	2・半径(m)	×	回転速度(rp/m)	周速度(m/s)
角速度	周速度(m/s)	÷	半径(m)	角速度(rad/s)
遠心力	運動エネルギー(kgm/s)	×	角速度(rad/s)	遠心力(N)
トルク	力(N)	×	半径(m)	トルク(Nm)
汚染物質の濃度	汚染物質の量(cm <sup>3</sup> )	÷	空気の量(m <sup>3</sup> )	百万分率(ppm)
測定値	誤差(mm)	÷	真の値(mm)	誤差率(%)
比例定数	グラフのyの変化量	÷	グラフのxの変化量	傾き(比例定数)
水の圧力	水の密度(kg/m <sup>3</sup> )	×	g(m/s) <sup>2</sup> ・水深(m)	水の圧力(Pa)
流体	断面積(m <sup>2</sup> )	×	流速(m/s)	流量(m <sup>3</sup> /s)
荷重	部材の引張力(N)	÷	部材の断面積(m <sup>2</sup> )	応力(Pa)
材料の安全率	引張強さ(MPa)	÷	許容応力(MPa)	安全率

新しい「工業数理基礎」(平成18年版)は、古い「工業数理」(平成11年版)に比べると、内容も表現方法も、そして指導順も含めて分かりやすくなっている。新しい教科書は、大判サイズで、説明の図や写真やグラフなどが多数取り入れられており、とても見やすく分かりやすく工夫が施されている。ページも200頁と少なくなっており、古い教科書が300頁あったのに比べると、3分の2のページ数になっている。

また、演習問題の中に、具体的な事例が幅広く大量に載っているもので、余裕があれば内容を膨らませることもできそうである。

一方、内容的に省かざるを得なかったものもあり、次にあげる内容が削られたのは残念である。これは、実習中心の工業高校において、座学である工業数理の単位数が少ないことからくるので、やむを得ないことだろう。

ダム貯水量 微分方程式	鉄道レールの傾き 球形容器の設計	振動する事象(三角関数の関係からか?) 予測と計画(全部)
----------------	---------------------	----------------------------------

一方、汚染などの環境問題と表計算ソフトの活用が入ってきているが、これらは、時代の要請から来るのだろうか。ともかく「工業数理」の内容は、外延量・内包量の具体例が全体のほとんどをしめていることが分かった。つまり、実社会で利用される内容の基礎には、外延量・内包量が深く根付いていることがわかった。この事実を元に、一般の高校数学の内容も「内包量の観点」で編集し直して見てはどうだろうか。

### 4. 高校数学での内包量指導のプラン

小学校の指導順は子供達が理解しやすい順を元に配列して思うので、高校でもその順を進めていき、最後にBの「勾配」をもってくるのではどうだろうか。つまり、A C D Bの順である。

A: 密度系	C: 流量系	D: 速度系	B: 勾配系
--------	--------	--------	--------

難易度から言って、割り算が出てくる微分系(DやB)から始めるよりは、掛け算の積分系(AやC)から始めた方が、計算が容易であるし、教具やパソコンなどの利用も可能であるので、生徒の理解が容易に思える。

#### (A)「密度系」の指導プラン

汚染物質の濃度  
混雑率  
トマトの収穫度  
食料品の単価  
人口密度  
美味しい水の成分  
アルキメデスの金冠  
コップに浮かぶ氷  
水槽にレンガを浮かす実験  
世界の医師の数

#### (C)「流量系」の指導プラン

河川の流量  
コーラ工場のピンの流れ  
駅の利用人数  
高速道路の交通量  
朝のラッシュ  
ゴミ問題

#### (D)「速度系」の指導プラン

車のカーナビの仕組み  
印刷機の速さ  
スペースシャトルのスピード  
回転寿司の速さ  
渋滞  
パソコンの速さ

#### (B)「勾配系」の指導プラン

山の高さ  
校舎の高さ

### 5 . 最後に

高校数学が苦手な生徒を見てみると、「分数計算」と「関数」が苦手と言う生徒が多いように思える。具体物を取り入れながら「比例」(注8)や「量」(注9)を学びなおすことで、その克服が可能になると同時に、「内包量」の理解が現実社会に登場する具体例の理解につながっていくと思う。そのためにも、小学校の内包量の指導法で培われてきた指導プランの高校版にあたるものの完成が待たれている。

### 6 . 参考

- (注1) 遠山啓著作集「数学論シリーズ1・数学の展望台」p.238より
- (注2) 増島高敬レポート「2時間で学ぶ量の理論・メモ」より
- (注3) 上垣渉著作「内包量をみわたす - 1あたり量・単位あたり量・内包量 -」p.266より
- (注4) 銀林浩著作「量の世界」より
- (注5) ベレ出版「単位がわかると物理がわかる (SI単位系の成り立ちから自然単位系まで)」  
(和田純夫・大上雅史・根本和昭共著)
- (注6) 実教出版の「工業数理基礎」(平成18年2月発行)と「工業数理」(平成11年2月発行)の2冊より
- (注7) 異種の量の割り算を「度」、同種の量の割り算を「率」と言う。
- (注8) 太郎次郎社のらくらく算数ブックシリーズ7「比例の発見」(榊忠男監修・岩村繁夫著)より
- (注9) 太郎次郎社のらくらく算数ブックシリーズ6「量の世界」(榊忠男監修・市川良著)より