工業数理基礎	項目	物理	項目	数学	項目

①導入として、基礎的な数理を扱う。

序章 工業事象	カーナビ	序章 電気	電気の歩み	数学基礎	
第1章 基礎的な数理	ピラミッドの底面積		電気を操る		
	パルテノン神殿の黄金比		コンピュータ		
	紙のサイズ				
	建ぺい率				
	方眼紙を利用した面積				
	加工部品の体積				
	自動車の速さ				
	電流と電圧				
	校舎の高さ				

②内包量をキーワードに、3教科合同のプランを作成し、共通した言葉として「内包量」を表面化する。

第2章 単位と数値処理	物体の加速度	第1章 力学	速度・加速度	数Ⅱ第4章 微分と積分	瞬間の速さ
	密度と質量		力のつり合いと作用・反作用		微分係数
	力		運動の3法則		導関数
	圧力・応力		摩擦力		接線の方程式
	仕事		圧力		増減表とグラフがき
	仕事率		剛体のつり合い		極大・極小
	電力		エネルギー		最大・最小
	電力量		熱と温度		不定積分
	運動エネルギー		熱と仕事		定積分
	位置エネルギー		電気と仕事		面積
	モル濃度		エネルギーの変換と保存		
第8章 時間とともに変わる事象	微分				
	積分				

③内包量の指導順序として、「濃度・密度」系→「流量」系→「速度」系→「勾配」系の順に扱う。
（分布／空間）→（分布／時間）→（位差／時間）→（位差／空間）………これについては、12月10日（月）の工数学習会の資料参照

第4章 環境の数理	汚染物質の濃度
	自動車の排出ガス
	地球の温暖化
	pH
第6章 流れの数理	水の圧力
	流体
第3章 乗り物の数理	速さー時間線図
	円運動
	角速度
	遠心力
	トルク
第5章 数値処理とグラフ	測定値
	比例定数

④独自の内容

第7章 構造物と部材の設計	荷重				
	材料の安全率				
第9章 コンピュータによる数理処理	パソコンの活用				
		第2章 波動	波		
			波の重ね合わせ		
			波の伝わり方		
			音波		
			固有振動と共振		
			ドップラー効果		
			光		
			光の回折と干渉		
			鏡とレンズ		
				数Ⅰ第1章 方程式と不等式	文字を使った式
					多項式の四則
					展開公式
					因数分解
					ルートの計算
					実数
					方程式
					2次方程式
					解の公式
					不等式
				数Ⅰ第2章 2次関数	関数
					2次関数
					2次関数のグラフ
					2次関数の最大値と最小値
					グラフと2次方程式
					グラフと2次不等式
				数Ⅰ第3章 図形と計量	三角比
					三角比の相互関係
					正弦定理
					余弦定理
					三角形の面積
					鈍角の三角比
					相似な図形
					球の表面積と体積
				数Ⅱ第1章 式と証明・高次方程式	分数式
					証明
					複素数
					2次方程式の判別式
					解と係数の関係
					高次方程式
				数Ⅱ第2章 図形と方程式	座標
					2点間の距離
					内分外分
					直線の方程式
					2直線の関係
					円の方程式
					円と直線
					不等式の領域
					連立不等式の領域
				数Ⅱ第3章 いろいろな関数	累乗根
					指数関数
					対数関数
					常用対数
					一般角
					三角関数
					三角関数の相互関係
					加法定理
					弧度法

「高校での内包量 Ver.07.12.10」

埼玉県立久喜工業高等学校・武田利一

０．はじめに

「数学」は初め、自然などに含まれている「量」を抽出し、その相互関係を分析する中で未知のものを知る道具として発達してきた。そう言う意味で「物理（自然現象を解明する学問）」と一体と言って良いだろう。
その後、方程式が生まれ、座標が誕生し、微分・積分が研究され、一方、幾何学や数論なども独自の発展を見せている。
明治時代になって、日本の国内では、日本の教育力をどう高めるかと言う課題が生まれ、ドイツのクロネッカーの元に留学した藤沢利喜太郎（注１）によって「黒表紙（当時の国定教科書）」が作られ、その後の日本の「数学教育」の基礎を築いたと言えるだろう。
クロネッカーは当時一般に行われていた数学研究の方法から離れ、「量を無視し、純粋に数だけを取り出して、その相互関係から数学を研究する」と言う画期的な手法を編み出し、当時の第一人者と言われる数学者であった。しかし、これはあくまで一つの手法に過ぎなかったのにもかかわらず、藤沢利喜太郎は日本の初等数学教育にこの考え方を持ち込んだ結果、「量」を軽視した数学教育が誕生してしまったのである。

１．外延量（がいえんりょう）と内包量（ないほうりょう）とは

液量、長さ、面積、体積と容積、重さ、時間、モーメントなど、ものの「存在の規模や広がり」を表す量（第１次的な量）を外延量と言い、加法性をもつ点がその特徴である。　また、内包量とは、２つの外延量の相互関係によって決まり、「ある性質の強さ・程度」を表す量（第２次的な量）のことである。「１あたりの量」「単位あたり量」とも一般に呼ばれている。
密度や流量、勾配や速度などの内包量は社会生活の中にも自然界にも無数に存在しており、次の表に見られるように四種類に分類できる。

【内包量の分類】（注２）

分母＼分子	分布量	位差量
空間的な量	密度（A）	勾配（B）
時間	流量（C）	速度（D）

上記の表による内包量の分類の後、内包量の指導順について小学校では実践が繰り返されてきたが、現在のところ次の手順が考えられる。全体で２０時間ぐらいの展開である。

【内包量の指導手順】（注３）

	第１種	第２種	第３種
A_1	金属密度（６ｈ）人口密度（２ｈ）	収穫度、単価	散布度
A_2	濃度（４ｈ）		
C	仕事量（２ｈ）	流量	ｶﾞｿﾘﾝ消費量
D	速度（６ｈ）		

２．内包量と微積分

人間で例えると、外延量は「体」で、内包量は「心」にあたると思う。高校数学に「量」を持ち込むこと自体は画期的ではあるけれども、外延量だけ入れて終わるのではなく、内包量も導入していくことが大事だと思う。この両者が入ることで、その数学自体の本当の理解へとつながっていくことだろう。さらに、高校数学における微積分との関連も見えてくる。

【内包量と微積分の関連】（注４）

x＼y	分布型	位差型	
空間型	密　度（A）	勾　配（B）	→　場
時間型	流　量（C）	速　度（D）	→　時系列
	↓ 積　分	↓ 微　分	
	(第２用法) ａｘ＝ｙ	(第１用法) ｙ／ｘ＝ａ	
	スカラー量	ベクトル量	

３.「工業数理」に出てくる量

　連続量÷連続量と言うことから、「単位あたり量」が出てくるが、これが内包量の理解につながるので、「単位がわかると物理がわかる」という本(注5)を読んでみた。そこに書いてある多種多様な量を見るにつけ、工業高校で勉強する「工業数理」の教科書にそれらがどの程度出てくるのか分析してみる気持ちが起こった。
　そこで、工業高校の「工業数理」の教科書(注6)をもらって調べていくと、確かにたくさんの量が登場してくる。そこで、それらを外延量と内包量に分けながら一覧表を作ってみた。

【工業数理に出てくる量の分類】　　　　　◎印は「度」系の内包量、●印は「率」系の内包量(注7)

工業数理基礎	項目	量	演算	量	演算結果の量
序章 工業事象	カーナビ	ＧＰＳ衛星と車の距離（ｋｍ）	÷	電波の到達時間（ｓ）	◎　電波の速さ（ｋｍ／ｓ）
第１章 基礎的な数理	ピラミッドの底面積	長さ（m）	×	長さ（m）	面積（m^2）
	パルテノン神殿の黄金比	正面図の横の長さ（ｃｍ）	÷	正面図の縦の長さ（ｃｍ）	●　黄金比（１．６１８）
	紙のサイズ	横の長さ（mm）	÷	縦の長さ（mm）	●　Ａ４サイズ（比$\sqrt{2}$）
	建ぺい率	建築面積（m^2）	÷	敷地面積（m^2）	●　建ぺい率（%）
	方眼紙を利用した面積	縮尺地図の面積（ｋm^2）	÷	正方形の個数（個）	◎　縮尺正方形の面積（ｋm^2／個）
	加工部品の体積	底面積（ｃm^2）	×	高さ（ｃｍ）	体積（ｃm^3）
	自動車の速さ	走行距離（ｋｍ）	÷	走行時間（ｈ）	◎　自動車の速さ（ｋｍ／ｈ）
	電流と電圧	電圧（Ｖ）	÷	抵抗（Ｒ）	◎　電流（Ｉ＝Ｖ／Ｒ）
	校舎の高さ	校舎の高さ（m）	÷	校舎までの距離（m）	●　三角比（ｔａｎθ）
第２章 単位と数値処理	物体の加速度	◎　速さの変化（m／ｓ）	÷	時間（ｓ）	◎　加速度（m／ｓ^2）
	密度と質量	質量（ｋｇ）	÷	体積（m^3）	◎　密度（ｋｇ／m^3）
	力	質量（ｋｇ）	×	◎　加速度（m／ｓ^2）	◎　力（N=kgm/s^2）
	圧力・応力	◎　面に働く力（N）	÷	断面積（m^2）	◎　圧力（Pa=N/m^2）
	仕事	◎　一定の力の大きさ（N）	×	移動した距離（m）	仕事（Ｊ=Nm）
	仕事率	仕事（Ｊ）	÷	時間（ｓ）	◎　仕事率（W＝J/ｓ）
	電力	電圧（V）	×	◎　電流（I）	電力（W＝VI）
	電力量	電力（W）	×	時間（ｓ）	電力量（J＝Ws）
	運動エネルギー	質量（ｋｇ）	×	◎　速度（m／ｓ）	運動エネルギー（Ｊ=kgm^2/s^2）
	位置エネルギー	質量（ｋｇ）	×	高さ（m）	位置エネルギー（J=kgm^2/s^2）
	モル濃度	溶質のモル数(mol)	÷	溶液の体積(m^3)	◎　モル濃度(mol/m^3)
第３章 乗り物の数理	速さー時間線図	◎　速さ(km/h)	×	時間（ｈ）	走行距離（ｋｍ）
	円運動	２π・半径（m）	×	◎　回転速度（ｒｐｍ）	◎　周速度(m/ｓ)
	角速度	◎　周速度(m/ｓ)	÷	半径（m）	◎　角速度(rad/ｓ)
	遠心力	運動エネルギー(kgm/s)	×	◎　角速度(rad/s)	◎　遠心力（N）
	トルク	◎　力（N）	×	半径（m）	トルク（Nm）
第４章 環境の数理	汚染物質の濃度	汚染物質の量(cm^3)	÷	空気の量（m^3）	●　百万分率(ppm)
	自動車の排出ガス	炭化水素（ｍｌ）	÷	排出ガス（ｍｌ）	●　ｐｐｍ表示
	地球の温暖化	温度上昇(℃)	÷	年数(年)	◎　温度上昇変化(℃／年)
	ｐＨ	水酸化物イオンのモル数（ｍｏｌ）	÷	溶液（ｌ）	◎　水酸化物イオンの濃度（ｍｏｌ／ｌ）
第５章 数値処理とグラフ	測定値	誤差(mm)	÷	真の値(mm)	●　誤差率（%）
	比例定数	グラフのｙの変化量	÷	グラフのｘの変化量	●　傾き(比例定数)
第６章 流れの数理	水の圧力	◎　水の密度(kg/m^3)	×	ｇ（m/s^2）・水深（m）	◎　水の圧力（Pa）
	流体	断面積（m^2）	×	◎　流速(m/s)	◎　流量(m^3/s)
第７章 構造物と部材の設計	荷重	◎　部材の引張力（N）	÷	部材の断面積（m^2）	◎　応力（Pa）
	材料の安全率	◎　引張強さ(MPa)	÷	◎　許容応力(MPa)	●　安全率
第８章 時間とともに変わる事象	微分	ｙの変化量	÷	ｘの変化量	◎　導関数
	積分	◎　導関数	×	ｘの変化量	ｙの変化量
第９章 コンピュータによる数理処理	パソコンの活用				

　新しい「工業数理基礎」（平成１８年版）は、古い「工業数理」（平成１１年版）に比べると、内容も表現方法も、そして指導順も含めて分かりやすくなっている。新しい教科書は、大判サイズで、説明の図や写真やグラフなどが多数取り入れられており、とても見やすく分かりやすく工夫が施されている。ページも２００頁と少なくなっており、古い教科書が３００頁あったのに比べると、３分の２のページ数になっている。
　また、演習問題の中に、具体的な事例が幅広く大量に載っているので、余裕があれば内容を膨らませることもできそうである。
　一方、内容的に省かざるを得なかったものもあり、次にあげる内容が削られたのは残念である。これは、実習中心の工業高校において、座学である工業数理の単位数が少ないことからくるので、やむを得ないことだろう。

①ダムの貯水量　②鉄道レールの傾き　③振動する事象（三角関数の関係からか？）
④微分方程式　　⑤球形容器の設計　　⑥予測と計画（全部）

　一方、汚染などの環境問題と表計算ソフトの活用が入ってきているが、これらは、時代の要請から来るのだろうか。
　ともかく「工業数理」の内容は、外延量・内包量の具体例が全体のほとんどをしめていることが分かった。つまり、実社会で利用される内容の基礎には、外延量・内包量が深く根付いていることがわかった。この事実を元に、一般の高校数学の内容も「内包量の観点」で編集し直して見てはどうだろうか。

４．高校数学での内包量指導のプラン

小学校の指導順は子供達が理解しやすい順を元に配列してると思うので、高校でもその順で進めていき、最後に B の「勾配」をもってくるのではどうだろうか。つまり、A → C → D → B の順である。

A：密度系　→　C：流量系　→　D：速度系　→　B：勾配系

難易度から言って、割り算が出てくる微分系（ＤやＢ）から始めるよりは、掛け算の積分系（ＡやＣ）から始めた方が、計算が容易であるし、教具やパソコンなどの利用も可能であるので、生徒の理解が容易に思える。

（A）「密度系」の指導プラン

①汚染物質の濃度
②混雑率
③トマトの収穫度
④食料品の単価
⑤人口密度
⑥美味しい水の成分
⑦アルキメデスの金冠
⑧コップに浮かぶ氷
⑨水槽にレンガを浮かす実験
⑩世界の医師の数

（C）「流量系」の指導プラン

①河川の流量
②コーラ工場のビンの流れ
③駅の利用人数
④高速道路の交通量
⑤朝のラッシュ
⑥ゴミ問題

（D）「速度系」の指導プラン

①車のカーナビの仕組み
②印刷機の速さ
③スペースシャトルのスピード
④回転寿司の速さ
⑤渋滞
⑥パソコンの速さ

（B）「勾配系」の指導プラン

①山の高さ
②校舎の高さ

５．最後に

高校数学が苦手な生徒を見てみると、「分数計算」と「関数」が苦手と言う生徒が多いように思える。具体物を取り入れながら「比例」(注８) や「量」(注９) を学びなおすことで、その克服が可能になると同時に、「内包量」の理解が現実社会に登場する具体例の理解につながっていくと思う。そのためにも、小学校の内包量の指導法で培われてきた指導プランの高校版にあたるものの完成が待たれている。

６．参考

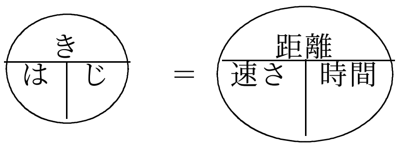
（注１）遠山啓著作集「数学論シリーズ１・数学の展望台Ｉ」p.238 より
（注２）増島高敬レポート「２時間で学ぶ量の理論・メモ」より
（注３）上垣渉著作「内包量をみわたすー１あたり量・単位あたり量・内包量ー」p.266 より
（注４）銀林浩著作「量の世界」より
（注５）ベレ出版「単位がわかると物理がわかる（ＳＩ単位系の成り立ちから自然単位系まで）」
（和田純夫・大上雅史・根本和昭共著）
（注６）実教出版の「工業数理基礎」（平成１８年２月発行）と「工業数理」（平成１１年２月発行）の２冊より
（注７）異種の量の割り算を「度」、同種の量の割り算を「率」と言う。
（注８）太郎次郎社のらくらく算数ブックシリーズ７「比例の発見」（榊忠男監修・岩村繁夫著）より
（注９）太郎次郎社のらくらく算数ブックシリーズ６「量の世界」（榊忠男監修・市川良著）より

高校１年生に指導する「微分の基礎」

久喜工業高校・武田　利一

１．速度の計算のしかた

小学校で、速さの計算の時に学んだ覚え方「はじき」からスタートした。



（例１）
ある人が、家Ａから２ｋｍはなれた公園Ｂから同じ速さでジョギングを始めて、川にかかる橋Ｃまで１０ｋｍを１時間で走破した。この人の走る速さを求めよ。

速さなので、覚え方「はじき」から、速さ×時間＝距離より、

$$速さ＝\frac{距離}{時間}＝\frac{１０ｋｍ}{１時間}＝１０\underline{ｋｍ／時}$$

↑
この単位が「単位あたり量」であることを示している。数学では、この単位は書かないで計算するが、立式するときはヒントとなるので、書いて考えよう。
なお、分母の単位が１つしかないときは、「1 あたり量」と言う。秒速・分速・時速など分母の単位が秒分時など　たくさんあるときは、「単位あたり量」と言う。
それらをまとめて　「内包量（ないほうりょう）」と言う。

次に、この人のジョギング運動を立式するため、公園からの時間をｘ時間、家からの距離をｙｋｍとおくと、覚え方「はじき」より、

距離　＝速さ×時間　　　　　　家からのスタート地点までの距離
ｙｋｍ＝１０ｋｍ／時・ｘ時間　　　＋　２ｋｍ
↑
この「単位あたり量」の分母の単位が、後ろに何をかけるかを教えてくれる。分母の単位と消し合うようなものを持ってくるわけだ。この場合は、時（または時間）である。時が消えると、単位がｋｍとなるので、家からスタート地点までの距離の単位ｋｍと同じになり足し算ができる。そして、左辺の求めようとしていた距離ｋｍと単位的に一致するわけだ。

したがって、この人のジョギング運動の式は、数学的には
　　ｙ＝１０ｘ＋２
となる。

これをグラフにかくと、よりいっそうジョギングの様子が見られるので、対応表を作ってグラフをかいてみよう。
まずこの式は、１次関数だから、下図のような BlackBox になる。

　　　入力　　　　　　　　　　　出力
ｘ　→　［　１０・（　）＋２　］　→　ｙ

対応表は、上段が入力のｘの値、下段が出力のｙの値として計算する。BlackBox の中の（　）にｘの値を入れて計算すると良い。
この問題の現実では、ｘは時間なので、ｘの値に－２や－１などのマイナスの数を入れることはないが、グラフをかく目的のためには、－２や－１でも計算する。
この対応表のｘの値とｙの値を組にすると、点の座標となる。これを、下記の直交座標（ｘｙ座標）に取っていこう。

x	－2	－1	0	1	2	3
y						

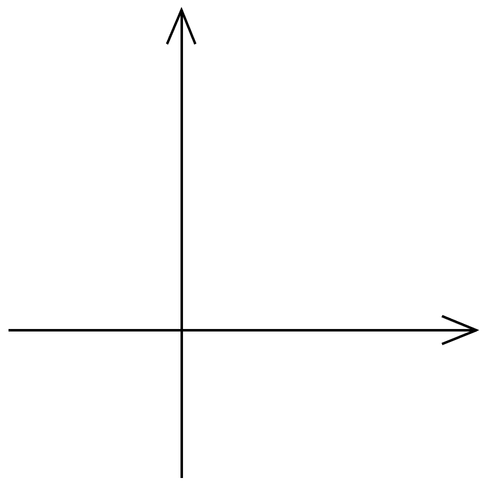
（－２，　）（－１，　）（０，　）（１，　）（２，　）（３，　）

６つの点を結んでできるグラフは、図形の直線と一致するので、中学時代の直線のかき方の復習をする。
ｙ＝１０ｘ＋２　の式から、傾きが１０で、ｙ切片が２と言う声が返ってくるが、次の点を丁寧に解説した。

①傾き１０は、直角三角形から作図すること。その際、右に１進んだとき上へ１０あがる内包量(１あたり量)であること。

②ｘの目盛幅とｙの目盛幅が関数のときは異なっても良いことを理解させる。例えば、関数は時間ｘを入力したら距離ｙが出力されるから、異なる量の間の関係式であることを強調し納得させる。

③座標全体をスクリーンに見立てて、えがく範囲を調整できることを示した。

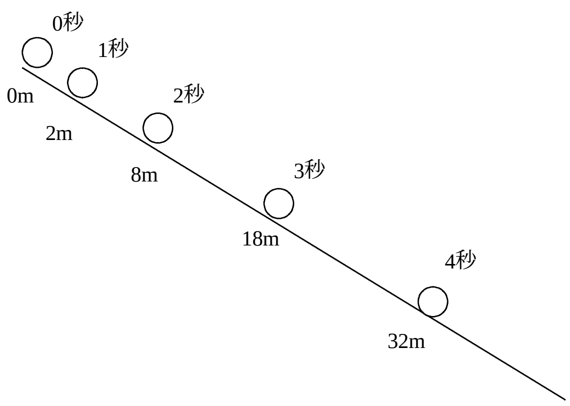


したがって、速さ１０ｋｍ／時は、１次関数のときは傾きの部分に表れて分かりやすいが、これからやる２次関数はどうなるか考えていくことを課題にする。

２．坂をくだるボールの速さ

坂を下るときは、地球の引力が働いてボールに重力がかかるので、スピードが増していくことが分かるので、この速さを研究するのが第２時の課題である。

時間をｘ秒、ボールの進む距離をｙｍとして、対応表を作る。



ｘ秒	０	１	２	３	４
ｙｍ	０	２	８	１８	３２

立式もさせると、何とか２次関数$ｙ＝２ｘ^2$がでてくるが、係数２が１次関数のときのように「速さ」になるかどうか調べることにした。
まず、この対応表を見ながら、平均速度を計算させた。平均というイメージは、坂ではスピードが増していくので平均を考えるというのは納得いくようだ。

早速、０秒から１秒間の平均速度の計算を紹介した。速度の覚え方「はじき」より

$$\text{平均速度}=\frac{\text{後の距離}-\text{前の距離}}{\text{後の時間}-\text{前の時間}}=\frac{2\text{m}-0\text{m}}{1\text{秒}-0\text{秒}}=\frac{2\text{m}}{1\text{秒}}=2\text{m／秒}$$

以下同様にして、

１秒から２秒間の平均速度は、

$$\text{平均速度}=\frac{8\text{m}-2\text{m}}{2\text{秒}-1\text{秒}}=\frac{6\text{m}}{1\text{秒}}=6\text{m／秒}$$

２秒から３秒間の平均速度は、

$$\text{平均速度}=\frac{18\text{m}-8\text{m}}{3\text{秒}-2\text{秒}}=\frac{10\text{m}}{1\text{秒}}=10\text{m／秒}$$

３秒から４秒間の平均速度は、

$$\text{平均速度}=\frac{32\text{m}-18\text{m}}{4\text{秒}-3\text{秒}}=\frac{14\text{m}}{1\text{秒}}=14\text{m／秒}$$

ｘ秒	０	１	２	３	４
ｙｍ	０	２	８	１８	３２
速さ ｖｍ/秒	∨ ２	∨ ６	∨ １０	∨ １４	

時間ｘ秒から速さを求める立式をすると、右斜め下にずらした式だが、

ｖ＝４ｘ＋２

となる。

係数の２とは関係ない４が出てきたが、この式があれば、坂を転がるボールの速さの計算はできそうである。
例えば、x=８秒～９秒間の平均速度は

ｖ＝４・（８）＋２＝３４ｍ／秒

となる。
このような研究がニュートンらによって進められ、「差分法」と言う学問が誕生した。しかし、次のような問題をもっていた。

> ①　ｘとｖの間が右斜め下とずれていること。
>
> ②　あくまで平均速度であり、８秒ジャストの瞬間速度や９秒ジャストの瞬間速度ではない。感覚的には、その真ん中の８．５秒の瞬間速度のようである。

３．「２秒ジャスト」の瞬間速度を出す

上の欠点②を逆に利用して、「２秒ジャスト」の瞬間速度は、１．５秒から２．５秒間の平均速度で出してみる。

$ｙ＝２ｘ^2$に、ｘ＝１．５秒と２．５秒を代入して、ｙの値（ｍ）を求めると、

$ｘ＝1.5$秒のとき、$ｙ＝2(1.5)^2＝2×2.25＝4.5$ｍ

$ｘ＝2.5$秒のとき、$ｙ＝2(2.5)^2＝2×6.25＝12.5$ｍ

したがって、

1．５秒から２．５秒間の平均速度（つまり、２秒ジャストの瞬間速度）は、

$$\text{平均速度}=\frac{12.5\,\text{m}-4.5\,\text{m}}{2.5\,\text{秒}-1.5\,\text{秒}}=\frac{8\,\text{m}}{1\,\text{秒}}=8\,\text{m}/\text{秒}$$

同様にして、

－０．５秒から０．５秒間の平均速度（つまり、０秒ジャストの瞬間速度）は、

$$\text{平均速度}=\frac{0.5\,\text{m}-0.5\,\text{m}}{0.5\,\text{秒}-(-0.5\,\text{秒})}=\frac{0\,\text{m}}{1\,\text{秒}}=0\,\text{m}/\text{秒}$$

０．５秒から１．５秒間の平均速度（つまり、１秒ジャストの瞬間速度）は、

$$\text{平均速度}=\frac{4.5\,\text{m}-0.5\,\text{m}}{1.5\,\text{秒}-0.5\,\text{秒}}=\frac{4\,\text{m}}{1\,\text{秒}}=4\,\text{m}/\text{秒}$$

２．５秒から３．５秒間の平均速度（つまり、３秒ジャストの瞬間速度）は、

$$\text{平均速度}=\frac{24.5\,\text{m}-12.5\,\text{m}}{3.5\,\text{秒}-2.5\,\text{秒}}=\frac{12\,\text{m}}{1\,\text{秒}}=12\,\text{m}/\text{秒}$$

３．５秒から４．５秒間の平均速度（つまり、４秒ジャストの瞬間速度）は、

$$\text{平均速度}=\frac{40.5\,\text{m}-24.5\,\text{m}}{4.5\,\text{秒}-3.5\,\text{秒}}=\frac{16\,\text{m}}{1\,\text{秒}}=16\,\text{m}/\text{秒}$$

これを表にまとめると、

x秒	0	1	2	3	4
vm/秒	0	4	8	12	16

したがって、

$$v=4x$$

という立式ができる。速さはm／秒と言う単位がつくので、内包量である。したがって、最初に勉強した単位の構成上のかけ算の式が考えられる。

$$v\,\text{m}/\text{秒}=4\,\text{m}/\text{秒}^2\cdot x\,\text{秒}$$

↑
この単位は加速度である。

この係数４が容易に求めれば、瞬間速度ｖを出すことが容易になると、ニュートンやライプニッツは考えた。

運動の式 $y=2x^2$ から、速度の式 $v=4x$ をどのようにすれば求められるのだろうか。そのためには、このやり方の欠点を克服しなければならない。

> ①　ちょうど真ん中が平均速度と一致するという保証はない。

４．時間の幅にｈを利用して欠点克服

ｘ＝２秒の瞬間速度を出すために、１．５秒から２．５秒間までの平均速度より推測として求めたのだが、真ん中がそうなのかと言う不安は消えない。
そこで、この時間の幅を文字ｈを利用して表し、（２－ｈ）秒から（２＋ｈ）秒までの平均速度を求め、この「時間の幅ｈを限りなく０に近づける」と言う極限の考えを使えば、真ん中にこだわる必要が無く、正しい瞬間速度が求められるだろう。

$$v(2\,\text{秒})=\lim_{h\to 0}\frac{2(2+h)^2\text{m}-2(2-h)^2\text{m}}{(2+h)\,\text{秒}-(2-h)\,\text{秒}}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{2(4+4h+h^2)\,\text{m}-2(4-4h+h^2)\,\text{m}}{2h\,\text{秒}}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{16h\,\text{m}}{2h\,\text{秒}}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{16}{2}\ \frac{\text{m}}{\text{秒}} = 8\,\text{m／秒}$$

（※　この例では、約分のために「ｈ→０の計算」は使われていない。）

正確にはこの両側からの挟み込みで計算するのだが、展開が２回あるため計算が結構大変なので、右半分の計算のみにすると便利であるし、結果は変わらない。２秒から（２＋ｈ）秒までの平均速度を計算し、極限を求めると、

$$v(2\text{秒}) = \lim_{h \to 0} \frac{2(2+h)^2\text{m} - 2(2)^2\text{m}}{(2+h)\text{秒} - (2)\text{秒}}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{2(4+4h+h^2)\text{m} - 2(4)\text{m}}{h\text{秒}}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(8h+2h^2)\text{m}}{h\text{秒}}$$

$$= \lim_{h \to 0} (8+2h)\,\text{m／秒}$$

$$= 8 + 2 \cdot 0$$　　ｈ→０が使われて、ｈ＝０を代入計算する。

$$= 8\,\text{m／秒}$$

どちらのやり方にしろ、ｘ＝２秒のときの瞬間速度ｖ＝８ｍ／秒が求められる。このやり方は大変であるが、平均速度のもつ欠点「真ん中の瞬間速度だろうという推測」が克服できる。あとはこれを一般化するだけである。

５．導関数を求める

上のようにすれば、ｘ＝２秒のときの正しい瞬間速度ｖ＝８ｍ／秒が求められるが、これを一つ一つ計算して、対応表を作り、そこから「ｖ＝４ｘ」を導くのは大変なことである。

「ｖ＝４ｘ」を直ぐに求めることができるようにしたのが、「導関数の定義」である。
上の瞬間速度の求め方のｘ＝２秒のときと同様にする。ただし、ｘの文字のまま使い、計算的には上と全く同様にやっていく。

$$v(x\text{秒}) = \lim_{h \to 0} \frac{2(x+h)^2\text{m} - 2(x)^2\text{m}}{(x+h)\text{秒} - (x)\text{秒}}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{2(x^2+2xh+h^2)\text{m} - 2(x^2)\text{m}}{h\text{秒}}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(4xh+2h^2)\text{m}}{h\text{秒}}$$

$$= \lim_{h \to 0} (4x+2h)\ \text{m／秒}$$

$$= 4x + 2 \cdot 0$$

$$= 4x\ \ \text{m／秒}$$

したがって、この計算だけで、「ｖ＝４ｘ」が求まるので、具体的な瞬間速度を出すときは、この式のｘに時間を入力するだけで済む。

「$y = 2x^2$ 」の運動の式があれば、「ｖ＝４ｘ」と言う瞬間速度の式が求まった訳なので、このことを次のように言うことができる。
関数「$y = 2x^2$ 」から導かれた関数なので、「導関数」と言い、「ｙ´＝４ｘ」と書くことにする。
このダッシュの記号は瞬間速度をイメージした記号である。

6．微分の公式を求める

ただし、「$y=2x^2$」から「$y'=4x$」を求めることは、上のような定義を使わなくても推測できそうである。

「$y=2x^2$」 → 「$y'=4x$」

推測
①yに ′ の記号をつける。
②係数の２と指数の^2 をかけて４とし、係数とする。
③指数の^2 が１つ減って、指数が^1 となるが、x^1 は省略してxとする。

さて、この推測が正しいかどうか検証してみよう。

例として、「$y=3x^4$」をもとに考えてみると、推測では「$y'=12x^3$」となるはずである。確かめるためには、上の５で学んだ導関数の定義により計算してみると、

$$y'=\lim_{h\to 0}\frac{3(x+h)^4-3(x)^4}{(x+h)-(x)}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{3(x^4+4x^3h+6x^2h^2+4xh^3+h^4)-3(x^4)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{3x^4+12x^3h+18x^2h^2+12xh^3+3h^4-3x^4}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}(12x^3+18x^2h+12xh^2+3h^3)$$

$$=12x^3+18x^2\cdot 0+12x\cdot 0^2+3\cdot 0^3$$

$$=12x^3$$

したがって、この推測は正しそうなことが確かめられた。しかし厳密には、一般的な形「$y=x^n$」で証明しなければならないが、ここでは省くことにする。

さて、この考え方から、次の公式が生まれてくる。

微分の公式　$(x^n)'=nx^{n-1}$

この公式を覚えて活用していくのだが、この公式に付け加えて、n＝１のときとn＝０のときも併記して覚えよう。

n＝１のとき
$(x^1)'=(x)'=1\cdot x^{1-1}=x^0=1$　（∵指数の約束　$a^0=1$より）
$\therefore (x)'=1$

n＝０のとき
$(x^0)'=(1)'=0\cdot x^{0-1}=0$　（∵０の性質より）
$\therefore (1)'=0$

この３つをまとめて、

微分の公式　$(x^n)'=nx^{n-1}$　、　$(x)'=1$　、　$(1)'=0$

これを覚えておくと、いろいろな関数の導関数を簡単に求めることができる。このことを「微分する」とも言う。

7．微分の計算をする

では、微分の公式を利用して、$y=2x^3-3x^2+5x-2$ を微分してみよう。

$y'=(2x^3-3x^2+5x-2)'$
$=(2x^3)'-(3x^2)'+(5x)'-(2)'$　　和差でバラバラにする

$= 2(x^3)' - 3(x^2)' + 5(x)' - 2(1)'$　　係数を前に出す

$= 2 \cdot 3x^2 - 3 \cdot 2x + 5 \cdot 1 - 2 \cdot 0$　　微分の公式を使う

$= 6x^2 - 6x + 5$

これは、運動の式　$y = 2x^3 - 3x^2 + 5x - 2$　に対する速度の式　$y' = 6x^2 - 6x + 5$　となる。

$x = 2$ 秒のときの瞬間速度は、代入するだけで求めることができる。ずいぶん便利になったものである。

$$v(2秒) = y'(2) = 6(2)^2 - 6(2) + 5 = 24 - 12 + 5 = 17 \quad m/秒$$

いろいろな整関数で微分の演習をしてから、次のグラフ書きに移る。

以下、次のものが全て似たもの同士であると言う認識があると、いろいろな応用問題に活用できると思う。

１あたり量、単位あたり量、$\boxed{\text{内包量}}$

ベクトル、瞬間速度、$\boxed{\text{微分}}$

$\frac{yの変化量}{xの変化量}$ 、$\frac{dy}{dx}$ 、$f'(x)$

直角三角形のかたち、$\boxed{\text{直線の傾き}}$ 、接線

すべての曲線の近傍は直線化

8．内包量の解析に微分が利用できる

内包量は、次のようなものがある。

（１）「密度系」内包量………①汚染物質の濃度　②混雑率　③トマトの収穫度　④食料品の単価　⑤人口密度　⑥美味しい水の成分⑦アルキメデスの金冠　⑧コップに浮かぶ氷　⑨水槽にレンガを浮かす実験　⑩世界の医師の数

（２）「流量系」内包量………①河川の流量　②コーラ工場のビンの流れ　③駅の利用人数　④高速道路の交通量　⑤朝のラッシュ　⑥ゴミ問題

（３）「速度系」内包量………①車のカーナビの仕組み　②印刷機の速さ　③スペースシャトルのスピード　④回転寿司の速さ　⑤渋滞　⑥パソコンの速さ

（４）「勾配系」内包量………①山の高さ　②校舎の高さ

これらの解析に微分が利用できるのは、いろいろと便利である。