

## 1. はじめに

今年で再任用2年目です。再任用として最初に勤めた埼玉県立高校では週4日間勤務しましたが、底辺校の普通高校によくある「数学を勉強しても役立たない」と言う生徒の間に答えられないまま時間が過ぎてしまいました。反省を込めて自己分析をしてみますと、次の5点があったと思われまます。

### ①習熟度編成

入学時の数学の点数から見ても数学力格差が大きいため、習熟度編成で1クラスを2つに分けて指導（実際は2クラスを3つに分けて、多目的室クラスは合併して24名の1クラスで応用力向上に向けて指導）しているが、多目的室クラス（12名）に比べて、教室クラス（基礎力習熟クラス18名）の実力差は相当離れている。

教室クラスは更に2つに分けたいと常々思っていた。AとBに分ければ、A（10名）は数学基礎力はあるが授業態度が不十分で、「数学を勉強しても役立たない」と言う信念の元に勉強をしない者達で、B（8名）は小中学校時代に理由があって数学の基礎を学び損なって以来落ちこぼれてしまったまま復活できない状態にある者達です。

このBの生徒達は教具や丁寧な指導、更に支援大学ボランティアの個別指導で少しずつ回復でき、その喜びから高校数学も真面目に取り組み及第点を獲得できるまでになる可能性を示していた。しかし実際はAとBは一緒に学んでいるため、邪魔されてその到達点までいかないのが実態である。

一方Aの生徒達は興味ある内容を提示すると食い付いてきて、場合によっては多目的クラス以上の成果を上げる者も出てきたが、残念ながら多くのAの生徒は「数学を勉強しても役立たない」と言う信念を打ち破ることはできず、その結果授業は五月蠅い者となり（または眠ってしまい勉強を無視する者もでる）困難を極めたものになった。

### ②底辺校のテクニック

BのためにもAを何とかしたいとクラス担任や数学指導の同僚に相談しても、他のクラスも同様なため次のような対策しか示してくれなかったが、この方法があったため何とか精神的にも技術的にも1年間を乗り越えることができた。底辺校でのテクニックと言ったところかもしれない。

ア、「数学を勉強しても役立たない」と思っているのだから、寝ていても騒いでいても教室から外に出さずに1時間（実際は50分、外に出さないのはトイレでタバコなどを吸うのを防ぐためか。）子守をするつもりで気楽に授業をする。（私はこの精神が気を楽にしてくれた）

イ、騒ぐ生徒にはイエローカードやレッドカードを渡し、生徒指導の対象にする。（私はこのシステムに馴染めず1回出したが、止めてしまった。このシステムが役に立った先生とダメだった先生に分かれたのはなぜか？）

ウ、平常点を大量につけて成績に反映する。（私もそうだが、他の先生も実際のテストの点数は1ケタでも平常点で合格まで持って行けるので、Bの生徒を助けることができたのだ。その結果Aも不合格にはできにくくなった。）

エ、テストの前に疑似テストを行って点数をとらせる。（何もしないと全員0点という事も起こりうるので行っているが、その結果として直前だけ暗記する生徒が激増して真の実力など付きそうもない感じである。）

オ、四則計算ドリルやゲーム機を使った指導を授業導入時に行う。（このため授業開始から15分間は確かに生徒達は静かに熱中して行える。授業は25分間ぐらい要点を押さえて板書し説明。残りの10分は合間に静かにさせるために注意したりお説教したりで過ぎていきました。）

### ③授業研究

Aの「数学を勉強しても役立たない」と思っている生徒達を考え直させるには、教科書（明治政府以来一貫した没個性辛抱教育にもとづく文科省の指導内容を反映）では不可能です。そこから離れない限り作り出せないことを多くの教師は分かっているが、多忙化と御上には逆らえないこととそれを実現するには自分の実力不足を嘆いて、足を踏み出せないでいるのです。とは言え、「内包量」をキーワードに自主編成できる直前まで来た私も日和見から言い出せませんでした。深く反省はしています。

しかし、この高校では「教科間を越えた学校指定科目」を設定し自主編成に入っています。中身はまだまだ他校の物真似の域から脱していませんが、生徒の実態を研究していく中で大化けする可能性を秘めている科目だと思っています。本気になってこの科目を追究していくならば、いつの日か「内包量」の登場（自然科学は当然、社会科学においても）があり得るだろうと思います。

#### ④プリント作成

ノートが作成できない生徒（買えなくて他のノートを代用している生徒もいた）に対して、プリントをノート代わりにするサブノート方式が適していると先輩方から聞いていながら、他のことに興味を持ち努力を怠ったことが悔やまれる。折角定年間近の頃から「内包量」で教材プリントができると分かっているが、定年退職時のショック（給料が半減し、もうお役に立たない使い捨てという感じと、週の半分くらいの出勤でいい加減な気持ちが出てきたこと）から、このことを怠けてしまったわけです。学校に勤めているときだけが教師という考えのダメさを痛感しました。先輩方は学校ではなく地域に入っても無償で数学教育前進のために努力されていることを考えると自分が情けなくなります。

お金もあり、時間もあり、知恵や経験もある団塊の世代の「黄金の十年」を利用しなくてはもったいないと反省しています。

#### ⑤ログハウス作り

昨年の秋から計画し、今春から秋にかけてハーフビルドで建築する予定のログハウスに関するノウハウは実用的でかつ数学的な内容として、授業の中でプリントや話題にもっと登場させても良かったと悔やんでいます。この冬にユンボ（バックフォア）の運転資格を取った話や建築する土地の測量の話などを少ししたら、生徒の食い付き方が全然違うことを感じたからです。無駄話で授業に引きつけることも一理あると思っていましたが、この内容だと無駄話から数学の話へ機能的に展開できると思えるからです。

## 2. 内包量とは

再任用2年目になる今年の学校は、農業系のある高校なので、ますます内包量の事例を学べるチャンスが来たような気がします。今年こそは、なんとしてもサブノート方式で「内包量」の教材化を目指したいと思います。

さて、このレポートを初めて読まれた方もいると思うので、前回までのレポートから工業高校教師時代に習得した内容を以下に紹介したいと思います。

◇ ◇ ◇ ◇ ◇ ◇ ◇ ◇

液量、長さ、面積、体積と容積、重さ、時間、モーメント（トルク）などの「ものの存在の規模や広がり」を表す量を『外延量』（第1次的な量）と言い、**加法性をもつ点**がその特徴です。一方、このレポートで取り上げている『内包量』は、**2つの外延量の相互関係**によって決まり、「ある性質の強さ・程度」を表す量（第2次的な量）のことです。「1あたりの量」「単位あたり量」と、小学校や中学校では一般に呼ばれています。

高校では、あまり「内包量」という呼ばれ方をしないことが不思議です。たぶん、高校の勉強は公式を利用して計算演習はするが、具体例の量などについてはあまり意識しないで扱っているような気がします。実験をすれば、否応でも具体的な量が出てきますが、それをしないで物理などと棲み分けをしているのが現実でしょう。そのため、関数などのイメージが理解できないまま、記号としてしか扱わないように思います。イメージできなくても数学としての抽象化ができれば良いと考えているのでしょう。これでは、理解することは困難となります。その点実験を扱えば、関数の入力側の  $x$ （たとえば、時間）と、出力側の  $y$ （たとえば、距離）に量の単位がつくので、関数が具体的なイメージ（この関数は、時間から距離を求める計算式であると言うイメージ）として浮かんでくることができます。

そして、そのイメージの延長線上の密度や流量、勾配や速度などの内包量は、計算は難しいが存在は意識できるものとして無数に存在していることが分かります。社会生活の中にも自然界にも本当にたくさん存在しています。これらが、高校で「何のために数学を学ぶのか」または「高校数学を学ぶ理由」として、とても良い教材となると思います。

数教協の資料の中で、内包量が四種類に分類されています。

【内包量の分類】(注1)

分母 \ 分子	分布量	位差量
空間的な量	密度 (A)	勾配 (D)
時間	流量 (B)	速度 (C)

(注1) 増島高敬レポート「2時間で学ぶ量の理論・メモ」より

上記の内包量の分類自体も、小学校の授業実践の試行錯誤の結果、現在のよう形でまとめられたものです。そしてその後も、小中高でその指導実践が追求されています。しかし、一番進んでいる小学校の実践では、それらの内容と授業順がほぼ下記のようなようになります。A→B→Cの順です。Dについては中高でやるのか触れられていません。

【小学校での内包量の指導手順】(注2)

- A こみぐあい (電車ごっこ) → A 収穫度 (野菜づくり、雑草とり)・散布度 (ペンキ塗り)
- A 人口密度 (ドットで視覚化)・単価 → A 濃度 (食塩水、きな粉、砂糖水)
- A 物質密度 (固体、液体) → B 流量 (交通量調査、観光ラリー、改札口ゲーム)
- C 速度 (おもちゃの自動車レース、三輪車レース、玉運びレース、2人3脚レース、紙数え競争)
- 社会的内包量 (カロリー摂取量、労働時間、交通事故数、米の消費量、化学肥料使用量)

(注2) 数学教室「リレー連載AMI 40小学校-内包量」(和田常雄) p.72より

3. 高校の内包量

数教協の資料から、高校での内包量を微積分を絡めた分類表で示します。高校数学の目標と言われている微積分が、内包量の具体例なくしては語れないことが明らかであることが分かります。微積分の計算技術も大事ですが、その利用のされ方などが理解できる内包量の大切さが浮かび上がってきます。ただし、過去の数学者が証明した内容などは、大学生か専門家に任しても良いと思います。大学受験を受ける者にとってはそうもいかないでしょうが、ここではイメージ化の大切さを強調したいと思います。

また、応力などの具体例で登場するベクトルのイメージが、微分や割り算と絡まって広がっていくことが言えるようです。

【内包量と微積分の関連】(注3)

x \ y	分布型	位差型	
空間型	密度 (A)	勾配 (D)	→ 場
時間型	流量 (B)	速度 (C)	→ 時系列
	↓	↓	
	積分 (第2用法)	微分 (第1用法)	
	$a x = y$	$y / x = a$	
	スカラー量	ベクトル量	

(注3) 銀林浩著作「量の世界」より

工業高校の基礎で学んでいる「工業数理」の教科書の分析より、連続量÷連続量で計算される「単位あたり量」がたくさん出てきます。この単位あたり量が、高校数学の内包量理解を深めることができると考え、「単位がわかると物理がわかる」という本(注4)を読んでみました。その結果、単位があることでずいぶんと見えてくるものがあったので、単位を利用して下記のように「工業数理」の教科書を分析してみました。

(注4) ベレ出版「単位がわかると物理がわかる (S I 単位系の成り立ちから自然単位系まで)」(和田純夫・大上雅史・根本和昭共著)

【工業数理に出てくる量の分類】

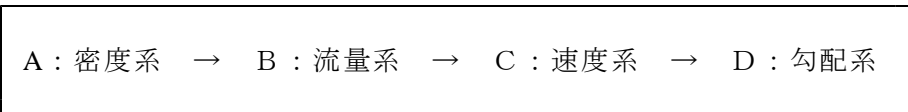
◎印は「度」系の内包量、●印は「率」系の内包量(注5)

(注5) 異種の量の割り算を「度」、同種の量の割り算を「率」と言う。

工業数理基礎	量	演算	量	演算結果の量
カーナビ	GPS衛星と車の距離 (km)	÷	電波の到達時間 (s)	◎ 電波の速さ (km/s)
ピラミッドの底面積	長さ (m)	×	長さ (m)	面積 (m <sup>2</sup> )
パルテノン神殿の黄金比	正面図の横の長さ (cm)	÷	正面図の縦の長さ (cm)	● 黄金比 (1.618)
紙のサイズ	横の長さ (mm)	÷	縦の長さ (mm)	● A4サイズ (比 $\sqrt{2}$ )
建ぺい率	建築面積 (m <sup>2</sup> )	÷	敷地面積 (m <sup>2</sup> )	● 建ぺい率 (%)
方眼紙を利用した面積	縮尺地図の面積 (km <sup>2</sup> )	÷	正方形の個数 (個)	◎ 縮尺正方形の面積 (km <sup>2</sup> /個)
加工部品の体積	底面積 (cm <sup>2</sup> )	×	高さ (cm)	体積 (cm <sup>3</sup> )
自動車の速さ	走行距離 (km)	÷	走行時間 (h)	◎ 自動車の速さ (km/h)
電流と電圧	電圧 (V)	÷	抵抗 (R)	◎ 電流 (I = V/R)
校舎の高さ	校舎の高さ (m)	÷	校舎までの距離 (m)	● 三角比 (tanθ)
物体の加速度	◎ 速さの変化 (m/s)	÷	時間 (s)	◎ 加速度 (m/s <sup>2</sup> )
密度と質量	質量 (kg)	÷	体積 (m <sup>3</sup> )	◎ 密度 (kg/m <sup>3</sup> )
力	質量 (kg)	×	◎ 加速度 (m/s <sup>2</sup> )	◎ 力 (N=kgm/s <sup>2</sup> )
圧力・応力	◎ 面に働く力 (N)	÷	断面積 (m <sup>2</sup> )	◎ 圧力 (Pa=N/m <sup>2</sup> )
仕事	◎ 一定の力の大きさ (N)	×	移動した距離 (m)	仕事 (J=Nm)
仕事率	仕事 (J)	÷	時間 (s)	◎ 仕事率 (W = J/s)
電力	電圧 (V)	×	◎ 電流 (I)	電力 (W = VI)
電力量	電力 (W)	×	時間 (s)	電力量 (J = Ws)
運動エネルギー	質量 (kg)	×	◎ 速度 (m/s)	運動エネルギー (J=kgm <sup>2</sup> /s <sup>2</sup> )
位置エネルギー	質量 (kg)	×	高さ (m)	位置エネルギー (J=kgm <sup>2</sup> /s <sup>2</sup> )
速さ-時間線図	◎ 速さ (km/h)	×	時間 (h)	走行距離 (km)
円運動	2π・半径 (m)	×	◎ 回転速度 (rpm)	◎ 周速度 (m/s)
角速度	◎ 周速度 (m/s)	÷	半径 (m)	◎ 角速度 (rad/s)
遠心力	運動エネルギー (kgm/s)	×	◎ 角速度 (rad/s)	◎ 遠心力 (N)
トルク	◎ 力 (N)	×	半径 (m)	トルク (Nm)
汚染物質の濃度	汚染物質の量 (cm <sup>3</sup> )	÷	空気の量 (m <sup>3</sup> )	● 百万分率 (ppm)
測定値	誤差 (mm)	÷	真の値 (mm)	● 誤差率 (%)
比例定数	グラフの y の変化量	÷	グラフの x の変化量	● 傾き (比例定数)
水の圧力	◎ 水の密度 (kg/m <sup>3</sup> )	×	g (m/s <sup>2</sup> )・水深 (m)	◎ 水の圧力 (Pa)
流体	断面積 (m <sup>2</sup> )	×	◎ 流速 (m/s)	◎ 流量 (m <sup>3</sup> /s)
荷重	◎ 部材の引張力 (N)	÷	部材の断面積 (m <sup>2</sup> )	◎ 応力 (Pa)
材料の安全率	◎ 引張強さ (MPa)	÷	◎ 許容応力 (MPa)	● 安全率

4. 「内包量」で高校数学を教えよう！

小学校の指導順を参考にして、次の順で高校数学全体を再構成して指導してはどうだろうか。



難易度から言って、割り算が出てくる微分系（CやD）から始めるよりは、掛け算の積分系（AやB）から始めた方が、計算が容易であるし、教具やパソコンなどの利用も可能であるので、生徒の理解が容易に思える。理解を深めることのできるイメージ図の「シェーマ」（数学用語）としては、AとBはかけわり図（長方形）、CとDは直角三角形が便利なのである。なお、下記にまとめた小学生向けの算数の参考書（注6）も活用できるだろう。

（注6） 太郎次郎社のらくらく算数ブックシリーズ「量の世界」（榊忠男監修・市川良著）と「比例の発見」（榊忠男監修・岩村繁夫著）より抜粋し下表を作成

<p><b>(A) 「密度系」の指導プラン</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>① 汚染物質の濃度</li> <li>② 混雑率</li> <li>③ トマトの収穫度</li> <li>④ 食料品の単価</li> <li>⑤ 人口密度</li> <li>⑥ 美味しい水の成分</li> <li>⑦ アルキメデスの金冠</li> <li>⑧ コップに浮かぶ氷</li> <li>⑨ 水槽にレンガを浮かす実験</li> <li>⑩ 世界の医師の数</li> </ul>	<p><b>(D) 「勾配系」の指導プラン</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>① 山の高さ</li> <li>② 校舎の高さ</li> </ul>
<p><b>(B) 「流量系」の指導プラン</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>① 河川の流量</li> <li>② コーラ工場のビンの流れ</li> <li>③ 駅の利用人数</li> <li>④ 高速道路の交通量</li> <li>⑤ 朝のラッシュ</li> <li>⑥ ゴミ問題</li> </ul>	<p><b>(C) 「速度系」の指導プラン</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>① 車のカーナビの仕組み</li> <li>② 印刷機の速さ</li> <li>③ スペースシャトルのスピード</li> <li>④ 回転寿司の速さ</li> <li>⑤ 渋滞</li> <li>⑥ パソコンの速さ</li> </ul>

更に、上記に出てくる内包量の名称の多岐にわたることを防ぐ意味でも、用語の使い方を次のようにしてはどうだろうか。

密度系の内包量は、濃度を「濃密度」、混雑度を「混雑密度」、収穫度を「収穫密度」、単価を「値段密度」、人口密度は「人口密度」、水の成分は「成分密度」、金冠は「金属密度」、医師の数は「存在密度」などです。

流量系の内包量は、川の流量は「川流量」、ビンの流れは「ビン流量」、駅の利用人数は「人流量」、交通量は「交通流量」、ゴミ問題は「ゴミ流量」などです。

この調子でいくと、山の高さは「山勾配」、建物の高さは「建物勾配」などで求めるとします。勾配の言葉と高さは関数  $y = a x$  の場合の  $a$  を使って  $y$  を求めるような感じで、関数の理解の難しさに関連しています。

最後の速度系の内包量は、カーナビの「電波速度」、印刷機の「印刷速度」、スペースシャトルの「飛行速度」、回転寿司の「回転速度」、渋滞の「進行速度」、パソコンの「CPU速度」などと呼ばば、内包量が4種類からできていることが分かります。たったの4種類で自然科学と社会科学の謎が分かり、数学や物理ができるようになれば「数学を勉強しても役立たない」と思う生徒は少なくなるのではないのでしょうか。