2010年夏
ＰＣ部数学勉強会①

年　　組　　番　氏名

1．データ表現

（1）１０進数（基数１０）………普通の数学で利用、０～９で表示

$$254 = (254)_{10} = 2\times10^2+5\times10^1+4\times10^0 = 254$$

（2）２進数（基数２）………コンピュータ等で利用、０と１で表示

$$1101 = (1101)_2 = 1\times2^3+1\times2^2+0\times2^1+1\times2^0 = 8+4+0+1 = 13 = (13)_{10}$$

（3）１６進数（基数１６）……カラーコードに利用、０～９，A～Fで表示

$$1A = (1A)_{16} = 1\times16^1+A\times16^0 = 16+10 = 26 = (26)_{10}$$

（4）８進数（基数８）………アクセス権に利用、０～７で表示

$$755 = (755)_8 = 7\times8^2+5\times8^1+5\times8^0 = 448+40+5 = 493 = (493)_{10}$$

【問１】次の各進数を１０進数に直せ。

（1）　（１０１１００１０）$_2$

（2）　（１１１０１１１１０）$_2$

（3）　（Ｆ４Ｃ）$_{16}$

（4）　（９ＢＣ３）$_{16}$

（5）　（５０５）$_8$

（6）　（７４１）$_8$

2010年夏
ＰＣ部数学勉強会②

年　　組　　番　氏名

２．基数変換

（１）１０進数→２進数

$(254)_{10} = (11111110)_2$

２で割る↓　　商↓　　余り

２）２５４	………０	↑	
２）１２７	………１	こ	
２）　６３	………１	の	
２）　３１	………１	向	
２）　１５	………１	き	
２）　　７	………１	に	
２）　　３	………１	読	※２進数になる
２）　　１	………１	む	
０			

（２）１６進数→２進数

$(F4C)_{16} = (1111\ 0100\ 1100)_2$

１６進数を１０進数に、それを２進数（４ビット）になおして
これを左から並べるとよい。

$(F)_{16} = (15)_{10} = (1111)_2$

$(4)_{16} = (4)_{10} = (0100)_2$

$(C)_{16} = (12)_{10} = (1100)_2$

（３）８進数→２進数

$(755)_8 = (111\ 101\ 101)_2$

８進数を１０進数に、それを２進数（３ビット）になおして
これを左から並べるとよい。

$(7)_8 = (7)_{10} = (111)_2$

$(5)_8 = (5)_{10} = (101)_2$

$(5)_8 = (5)_{10} = (101)_2$

８進数は全てそのまま１０進数になるので、すぐに２進数（３ビット）になおすとよい。

なお、８進数はアクセス権の管理に使われるが、これは２進数（３ビット）の形から設定されている。

$(755)_8 = (111\ \ 101\ \ 101)_2$

管理者　ｸﾞﾙｰﾌﾟ　使用者

	読み	書き	実行	
管理者	1	1	1	………全て可能
ｸﾞﾙｰﾌﾟ	1	0	1	………読むのと実行は可能
使用者	1	0	1	（書き込みが不可）

【問２】次の各進数を２進数に直せ。

（１）　$(142)_{10}$

（２）　$(4256)_{10}$

（３）　$(98D)_{16}$

（４）　$(4615)_8$

2010年夏
ＰＣ部数学勉強会③

年　　組　　番　氏名

３．２進化１０進数

コンピュータ内部のデータ表現の際に、表現安易部分では演算詳細部分と違って使いやすいように、２進数ではなく「２進化１０進数」を利用している。

１０進数の１桁を４ビット（２進数）で表示すると表現が安易になる。

（この４ビットで表示するのを「パック１０進数」と言い、８ビットで表示するのを「ゾーン１０進数」と言うが、４ビットの方がよく使われる）

しかし、計算的には間違いなので、演算部分では必ず本物の「２進数」になおして更に2バイト（１６ビット）に埋め込んで演算をしている。

$$(4256)_{10} = (0100\quad 0010\quad 0101\quad 0110)_{pack}$$

$$(4)_{10} = (0100)_2$$
$$(2)_{10} = (0010)_2$$
$$(5)_{10} = (0101)_2$$
$$(6)_{10} = (0110)_2$$

これを左から並べるとできるが、全体としては２進数ではないので、括弧の後に２と書けない。筆者は取りあえずpackと表示した。演算時に使う正式の２進数は問２（２）の解答を参照してください。

４．補数

数学の「２進法」のマイナス表現は、普通に２進数の前にマイナス符号を付ける。しかし、コンピュータは物理的世界なので有限のため、利用するビットで制御している。

２進数８桁（８ビット、１０進数で２５６まで表現できる）の場合、次のように表現する。

$$(5)_{10} = (0000\quad 0101)_2$$

↓　　０と１を入れ替える

↓　　（１の補数という）

$$(1111\quad 1010)_2$$

↓　　　　　　　　＋１を加える
↓　　　　　　　　（２の補数という）
（１１１１　１０１１）$_2$　　←これを求める！
↓
↓　　　　　　　　１０進数に戻すと
↓
（２５１）$_{10}$
↓　　　　　　　　２５６の補数と考える
↓　　　　　　　　（256－251＝5）
（－５）$_{10}$

【問３】次を２進化１０進数に直せ。

（1）　（９７）$_{10}$

（2）　（７８）$_{10}$

【問４】次の「２の補数」を求めよ。

（1）　（１１）$_{10}$

（2）　（１７３）$_{10}$

2010年夏
ＰＣ部数学勉強会④

年　　組　　番　氏名

５．コンピュータ内部のデータ表現

数値入力（ａ＝－１８、ｂ＝２０１）

↓

ゾーン（２進化１０進数）

１バイト（８ビット）

ａ　１１１１０００１１１０１１０００
ゾーン　１　－　８
↑
符号（ゾーン）

パック

ｂ　１１１１００１０１１１１００００１１０００００１
ゾーン　２　ゾーン　０　＋　１
↑
符号（ゾーン）

↓

パック（２進化１０進数）

４ビット

ａ　０００１１０００１１０１
１　８　－

演算

ｂ　００１０００００００１１１１００
２　０　１　＋

↓

固定小数点形式（２進数）

２バイト（１６ビット）

ａ　１１１１１１１１１１１０１１１０　……２の補数
－　↑
↑　小数点固定
符号　（最下位ビットの右）

２バイト（１６ビット）

ｂ　００００００００１１００１００１
＋

和ａ＋ｂ

２バイト（１６ビット）

１０００００００１０１１０１１１

↑＋　　　　　１８３

カット

↓

パック（２進化１０進数）

ａ＋ｂ

アンパック

４ビット

０００１　１０００　００１１　１１００

１　８　３　＋

↓

ゾーン（２進化１０進数）

ａ＋ｂ

８ビット

１１１１０００１　１１１１１０００　１１０００００１１

ゾーン　１　ゾーン　８　＋　３

符号

↓

数値出力（ａ＋ｂ＝１８３）

【問５】次の数値入力（ａ，ｂ）から数値出力（ａ＋ｂ）までの様子を表示せよ。
数値入力（ａ＝６５、ｂ＝－８２）

2010年夏
ＰＣ部数学勉強会⑤

年　　組　　番　氏名

６．２進数の和と差

（１）１０進数の和　９７＋７８＝１７５　を２進数で計算してみると、

（９７）$_{10}$＝（１１０００１）$_2$
（７８）$_{10}$＝（１００１１１０）$_2$

８ビット２進数よりは１６ビット２進数の方が計算しやすいので、以下１６ビット２進数で計算する。

＋ $\overline{\text{すべて0が入る}}$
（９７）$_{10}$＝（００００００００１１０００００１）$_2$
（７８）$_{10}$＝（００００００００１００１１１０）$_2$

計算は、０＋０＝０，０＋１＝１，１＋０＝１，１＋１＝１０（くり上がり）として行うと、

（００００００００１０１０１１１１）$_2$
＋　　　　　　　　　１７５

したがって、和１７５が求まる。

（２）１０進数の差　９７－７８＝１９　を２進数で計算してみると、

（９７）$_{10}$＝（００００００００１１０００００１）$_2$
（７８）$_{10}$＝（００００００００１００１１１０）$_2$

差を負数の和として考えて、７８の２の補数を求めると、

（－７８）$_{10}$＝（１１１１１１１１１０１１００１０）$_2$

（９７）$_{10}$＋（－７８）$_{10}$を計算して、

１（００００００００００００１００１１）$_2$
↑　＋　　　　　　　　　１９
はみ出しはカット

したがって、差１９が求まる。

【問６】次の１０進数の和と差を、１６ビットの２進数で計算せよ。

（１）　（３７）$_{10}$＋（１０８）$_{10}$

（２）　（３７）$_{10}$－（１０８）$_{10}$

2010年夏
ＰＣ部数学勉強会⑥

年　　組　　番　氏名

7．小数の基数変換

（1）2進数、8進数、16進数　→　10進数

$(0.101)_2 = 1 \times 1/2 + 0 \times 1/4 + 1 \times 1/8$

$= 1/2 + 1/8 = 5/8 = (0.625)_{10}$

$(35.7)_8 = 3 \times 8 + 5 \times 1 + 7 \times 1/8$

$= 29 + 7/8 = (29.875)_{10}$

$(3A.8)_{16} = 3 \times 16 + A \times 1 + 8 \times 1/16$

$= 48 + 10 + 8/16 = (58.5)_{10}$

（2）10進数　→　2進数

$(52.25)_{10} = 52 + 0.25$

$= (32 + 16 + 4) + 25/100$

$= (32 + 16 + 4) + 1/4$

$= (110100.01)_2$

（3）16進数　→　2進数

整数の時と同様に、1桁ずつ4ビットに直し、左から並べて書く。その際、小数点の位置は同じ位置に取る。

$(3A.8)_{16} = (\underbrace{0011}_{3}\ \underbrace{1010}_{A}\ \underset{.}{.}\ \underbrace{1000}_{8})_2$

$= (111010.1)_2$

（4）8進数　→　2進数

整数の時と同様に、1桁ずつ3ビットに直し、左から並べて書く。その際、小数点の位置は同じ位置に取る。

$(35.7)_8 = (\underbrace{011}_{3}\ \underbrace{101}_{5}\ \underset{.}{.}\ \underbrace{111}_{7})_2$

$= (11101.111)_2$

【問７－１】次の各進数を１０進数に直せ。なお、表示は小数第３位までとする。

（1）　$(101.111)_2$

（2）　$(17.53)_8$

（3）　$(F2C.1B)_{16}$

【問７－２】次の各進数を２進数に直せ。

（1）　$(105.5)_{10}$

（2）　$(9.AB)_{16}$

（3）　$(1.23)_8$

2010年夏
ＰＣ部数学勉強会⑦

年　　組　　番　氏名

8．浮動小数点形式

２進数８ビットでは、１０進数の－２５６から２５５までの数値しか表現しません。１６ビットまで拡げても、－６５５３６から６５５３５までです。そこで、固定小数点形式から、浮動小数点形式にかえることで、より広範囲で高精度の数値を表すことができます。

$$(-1)^{S}\times 0.M\times K^{E}$$

の形で表示する。例えば、１０進数では、

$$-640=(-1)\times 0.64\times 10^{3}$$

より、S=１、M=６４、K=１０、E＝３となるが、１０進数ではこれはあまり意味を持たないが、２進数（K＝２)になると、ビット上にこれを載せると非常に大きな数値を表すことが出来るようになる。

$$(-1)^{S}\times 0.M\times 2^{E}$$

【１６ビット浮動小数点形式の場合】

8ビット								8ビット							
S	７ビット 指数E							８ビット 仮数M							

$$-640=-5\times 2^{7}=-1\times\left(\frac{5}{8}\right)\times 2^{10}=(-1)\times\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{8}\right)\times 2^{10}$$

したがって、

$$0.M=(0.\overset{\frac{1}{2}}{1}\overset{\frac{1}{4}}{0}\overset{\frac{1}{8}}{1})_2$$ より、

S＝１、M＝$(101)_2$（左詰め）、E＝１０＝$(1010)_2$（右詰め）、残りは０を埋める。

S	E							M							
1	0	0	0	1	0	1	0	1	0	1	0	0	0	0	0

同じ１６ビットでも、固定小数点形式では、１０進数として５桁しか表せなかったが、浮動小数点形式では、Eの数の最大値$(1111111)_2$＝１２８より、2^{128} の桁数は常用対数の計算より、１０進数としての桁数は、

$$\log_{10} 2^{128}=128\times 0.3010=38.528$$　（答）３８桁

【３２ビット浮動小数点形式の場合】

８ビット								８ビット								８ビット								８ビット							

S

８ビット　　　　２３ビット

指数Ｅ　　　　仮数Ｍ

$(-1)^{S}\times 0.\mathrm{M}\times 2^{E}$　を少し変更して、

$(-1)^{S}\times 1.\mathrm{M}\times 2^{E-127}$

こうすることで、有効数字の桁数を８ビットから２３ビットまで拡げることができる。

$$-640=-5\times 2^{7}=-1\times\left(\frac{5}{4}\right)\times 2^{9}=(-1)\times\left(1+\frac{1}{4}\right)\times 2^{136-127}$$

したがって、

$\frac{1}{2}\ \frac{1}{4}\ \frac{1}{8}$

$1.\mathrm{M}=(1.010)_2$　、$136=128+8$

$S=1$、$M=(01)_2$、$E=136=(10001000)_2$

残りは０を埋める。

８ビット								８ビット								８ビット								８ビット							
1	1	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

S

８ビット　　　　２３ビット

指数Ｅ　　　　仮数Ｍ

【問８】次の１０進数３８４を浮動小数点形式で表示せよ。

（１）１６ビット浮動小数点形式では

８ビット								８ビット							

S

７ビット　　　　８ビット

指数Ｅ　　　　仮数Ｍ

（２）３２ビット浮動小数点形式では

８ビット								８ビット								８ビット								８ビット							

S

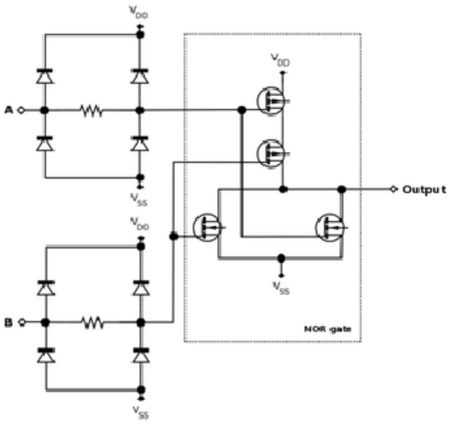
８ビット　　　　２３ビット

指数Ｅ　　　　仮数Ｍ

2010年夏
ＰＣ部数学勉強会⑧

年　　組　　番　氏名

９．論理回路



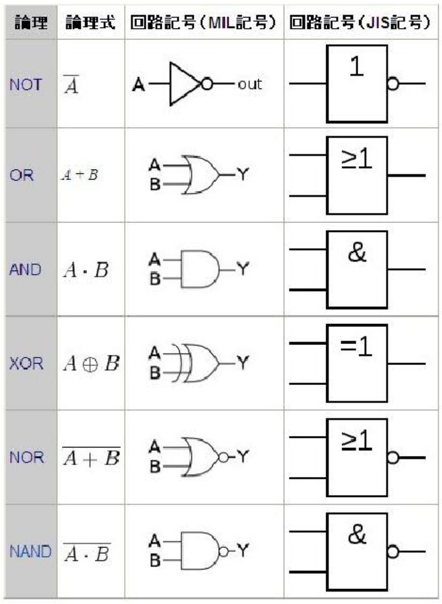
コンピュータの内部にある電気回路を理解するためには、論理回路の「論理式」や回路記号（MIL記号）や「真理値表」や「ベン図」を利用する必要がある。

また、ｐ→ｑのような命題論理やそれが発展した述語論理、それを専門に勉強するブール代数など学べば学ぶほどに深い論理の世界がある。

ここでは、その一部を覚えておこう。

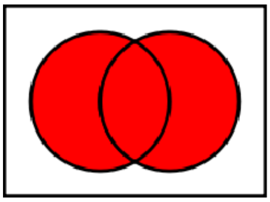
右記の表は、論理回路名と論理式と回路記号（MILとJIS）である。

ベン図についてもまとめると、次のようになる。

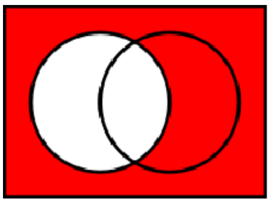


論理	論理式	回路記号（MIL記号）	回路記号（JIS記号）
NOT	$\overline{A}$	A out	1
OR	$A+B$	A B Y	≥1
AND	$A\cdot B$	A B Y	&
XOR	$A\oplus B$	A B Y	=1
NOR	$\overline{A+B}$	A B Y	≥1
NAND	$\overline{A\cdot B}$	A B Y	&

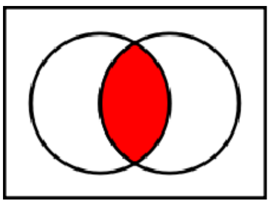
＜ベン図の基本＞



OR回路
（論理和）
Ａ＋Ｂ
和集合Ａ∪Ｂ

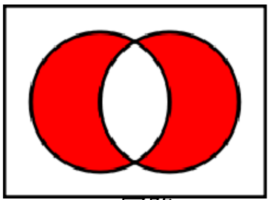


NOT回路
（否定）
$\overline{\text{A}}$
補集合$\overline{\text{A}}$

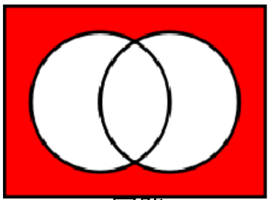


ＡＮＤ回路
（論理積）
Ａ・Ｂ
共通部分Ａ∩Ｂ

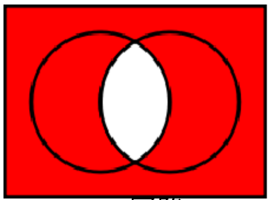
＜ベン図の応用＞



XOR回路
（排他的論理和）
$A \cdot \overline{B} + \overline{A} \cdot B$



NOR回路
（否定論理和）
$\overline{A + B} = \overline{A} \cdot \overline{B}$



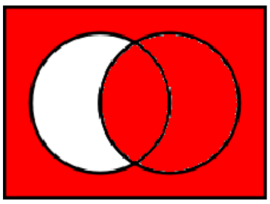
NAND回路
（否定論理積）
$\overline{A \cdot B} = \overline{A} + \overline{B}$

【問９】次の論理式の回路を描け。また論理計算をド・モルガンの定理を使って行い、簡単な論理式を求めよ。それをベン図で確認せよ。

$$Y = A \cdot B + \overline{A}$$

１０．ブール代数

ブール代数では、論理和Ａ＋Ｂをｐ∨ｑ（ｐまたはｑ）、論理積Ａ・Ｂをｐ∧ｑ（ｐかつｑ）、否定$\overline{A}$を¬ｐ（ｐでない）と表現するが、命題「ｐ→ｑ」も（¬ｐ）∨ｑと表現できる。ただし、命題は、ｐが真（1）のときについてのみ真偽を調査できる。命題のベン図は下記のようになる。



2010年夏
ＰＣ部数学勉強会⑨

年　　組　　番　氏名

１１．磁気ディスクへのアクセス時間の計算

平均シーク時間……磁気ヘッドが一番外側から一番内側まで移動する時間の半分を言う。２０ｍｓとは、２０ミリ秒＝０．０２０秒

平均回転待ち時間…１回のディスクの回転に要する時間の半分を言う。回転速度が３０００回転／分の場合は、

６０秒÷３０００回転＝０．０２秒／回転

０．０２秒÷２＝０．０１秒＝１０ｍｓ

平均待ち時間………平均シーク時間と平均回転待ち時間の合計を言う。

上の例では、２０ｍｓ＋１０ｍｓ＝３０ｍｓ

データ転送時間……磁気ヘッドが目的のレコードを読み取って転送が終了するまでの時間を言う。１トラック２０ＫＢの磁気ディスクから２ＫＢを読み取る時間は、

２０ＫＢ×３０００回転／分＝１ＭＢ／秒

これはデータ転送速度↑

２ＫＢ÷１ＭＢ／秒＝０．００２秒＝２ｍｓ

アクセス時間………平均待ち時間とデータ転送時間の合計を言う。

この例では、３０ｍｓ＋２ｍｓ＝３２ｍｓ

【問１１－１】平均シーク時間が１５ｍｓ、回転速度が２０００回転／分、１トラックが２０ＫＢの磁気ディスクの場合、１ＫＢのデータを読み取るのにかかるアクセス時間はいくらか。

【問１１－２】１レコードの長さが４０ＫＢ、データ転送速度は１０ＭＢ／ｓ、平均シーク時間は１０ｍｓ、平均回転待ち時間は５ｍｓの磁気ディスクの１レコードあたりのアクセス時間を求めよ。

１２．場合の数、順列、組合せ、確率について

場合の数Ａ……２つ以上の関連する事象（出来事）が、同時に起こると目的が達成できるときは、「積の法則」の計算をする。

袋に入っている５枚のカード（１から５の数字が書いてある）を３枚取り出して、３桁の整数は何通りできるか。

$5 \times 4 \times 3 = 60$通り

場合の数Ｂ……２つ以上の関連する事象（出来事）が、同時に起こらない（別々に起こる）と目的が達成できるときは、「和の法則」の計算をする。

家から駅まで行くのに、郵便局回りだと６通りの道があるが、海岸回りだと４通りの道がある。全部で何通りの行き方ができるか。

$6 + 4 = 10$通り

順列……………場合の数Ａの場合で、かけ算する数字が順に減数していくときを記号化して公式にしたのが順列である。

５枚のカードから３枚取り出して３桁の整数を作るときは、$5 \to 4 \to 3$と減数していくので、これを

${}_5P_3 = 5 \times 4 \times 3 = 60$通り

と計算する。

組合せ…………順列と同じようであるが、取り出したものに順番がないときは組合せと言い、次のように記号化した。

５枚のカードから３枚取り出しただけで整数を作るわけではない。何通りの取り出し方があるか。

${}_5C_3 = \dfrac{5 \times 4 \times 3}{3 \times 2 \times 1} = \dfrac{60}{6} = 10$通り

と計算する。

確率……………順列や組合せなどを利用して、全体の場合の数（起こりうる全ての場合の数）と問題になる場合の数を次のような分数にしたものが確率である。０から１までの間となる。

確率$= \dfrac{\text{問題になる場合の数}}{\text{全体の場合の数}}$

５枚のカードから３枚取り出したとき、３桁の整数で一の位が５となる確率を求めよ。

確率$= \dfrac{{}_4P_2}{{}_5P_3} = \dfrac{4 \times 3}{5 \times 4 \times 3} = \dfrac{1}{5}$

（注）この実験をプログラム化するか、または人力で実験した場合、実験回数を大きくしていくと、この確率に近づいていく。