２次関数のグラフを「２本の直線」を利用して簡易に描く方法

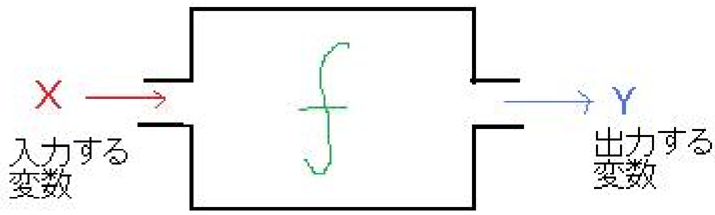
2011/10/05（水）
武田利一

１．「計算方法」から「関数」へ

１００円を二乗して、それを３倍した金額がある。ここから１００円を６倍した金額をもらう大人と、５円をもらう子どもがいたら、残金はいくらになりますか？

計算をすると、
（１００）^{2}×３－６×（１００）－５
＝３００００－６００－５
＝２９３９５
答は２９３９５円となる。

この１００円を固定しないで、いろいろな数値にする（変数にする）と、求める残金は変化していく。この状態を式にしたのが関数である。図で表現すると、



関数は、必ずXとYを組み合わせた
座標(X，Y)で点を表示できるので、
それを連続させると、グラフになる。

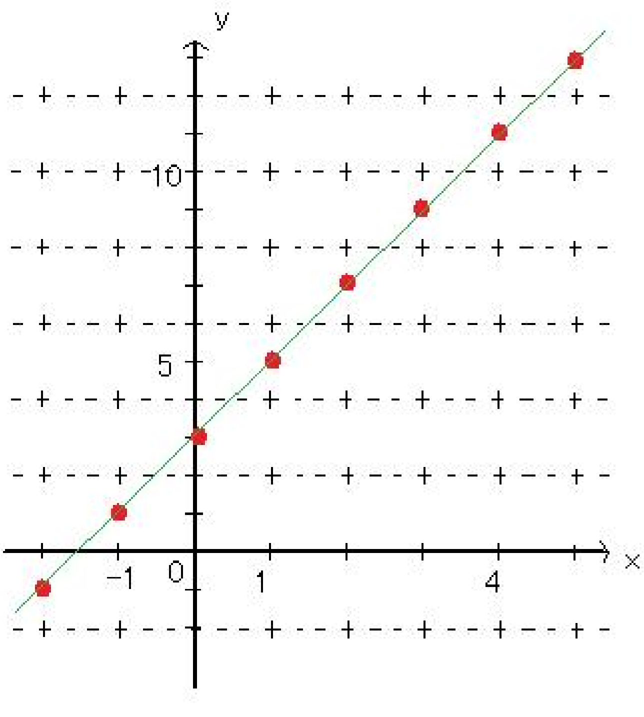
１００円のところをＸに、残金２９３９５円をＹと置き換えると、
（Ｘ）^{2}×３－６×（Ｘ）－５＝Ｙ
となる。これで、Ｘにいろいろな金額を入れれば、残金がＹとして出てくる。
これを少し並び替えて、
Ｙ＝３Ｘ^2－６Ｘ－５
これが「関数」としての表示である。２乗がついているので、２次関数という。
小文字の表現をよく利用する。
ｙ＝３ｘ^2－６ｘ－５

２．関数づくりの演習（略）

３．１次関数のグラフ

１次関数ｙ＝２ｘ＋３のグラフを書くには、本来の書き方と簡易法がある。
本来は、ｘの値を－２から５まで変化させて、ｙの値を求め、表（対応表という）にしてから、点として取り、それをもとにグラフを描く。

x	-2	-1	0	1	2	3	4	5
y	-1	1	3	5	7	9	11	13



もう一つの簡易法として、直線のもつ特長である「傾き」（上の場合はｘの係数の２にあたる。分数２／１と見なして、右に１進むと上に２あがる直角三角形の図を考える）と「ｙ軸との交点」（上の場合は定数項の３にあたる。 ｘ＝０のとき求められる）より、２点を作図し、それらを結ぶ直線を延長すればグラフが完成する。

本来の作図法よりは、覚えれば便利な簡易法が多く用いられている。

４．１次関数グラフ書きの演習（略）

５．２次関数のグラフの従来の描き方

２次関数ｙ＝３ｘ^2－６ｘ－５のグラフを書くには、本来の方法以外に３種類ある。本来の対応表を利用するやり方は、コンピュータなどを利用した詳細な表を作らない限り正確なグラフは描きにくい。理由は、頂点部分が直線と違い曲線のため正確さが要求されるからである。

そのため編み出されたのが、「平方完成（完全平方）」という変形方法である。
この変形技術が「数学の実力と比例」しているので、そのため受験競争やテスト主義を推進する今の教育界にとって捨てがたい方法となっている。この変形技術の真の精神が、上のような違った使われ方をすることは残念である。

そのため、そこから派生した２つの方法

①平方完成で見つけた頂点の座標を暗記によって利用する「頂点と係数の関係」法

②ｘ軸を定数項分だけ上下に平行移動して２点、その中央のｘ座標を代入計算して頂点の座標１点を出し、これら３点で描く「三点法」

がある。①も②も平方完成による計算技術の難解さを取り除こうとしているわけだが、それなりの問題点を抱えている。

６．２次関数のグラフを「２本の直線」を利用して簡易に描く方法（私案）

この方法を考えたのは、

ア、「下の技術で上の解法を」という精神

イ、数学は意外と多く「簡易法」が利用されている

ウ、「頂点と係数の関係」が便利そうに思えた

エ、作図は「三点法」のように３点で描くことが多い

の点からである。そこで、「頂点と係数の関係」の見直しを試みた。

2次関数の頂点の公式

$$\left(-\frac{b}{2a} \ , -\frac{b^2-4ac}{4a} \right)$$

ｙ座標の中にｘ座標が入っているような感じがしたので、ｙ座標の変形をしてみると、

$$y = -\frac{b^2-4ac}{4a}$$

$$= -\frac{b}{2a}\cdot\frac{b}{2} + c$$

$$= \frac{b}{2}x + c$$

という１次関数（直線）となった。そこでもう一工夫して、

$$\frac{b}{2} = B$$

とおいてみると、暗記すべき式を以下のように作ることができた。

$$x = -\frac{B}{a}$$

y軸に平行な縦の直線(x＝定数)

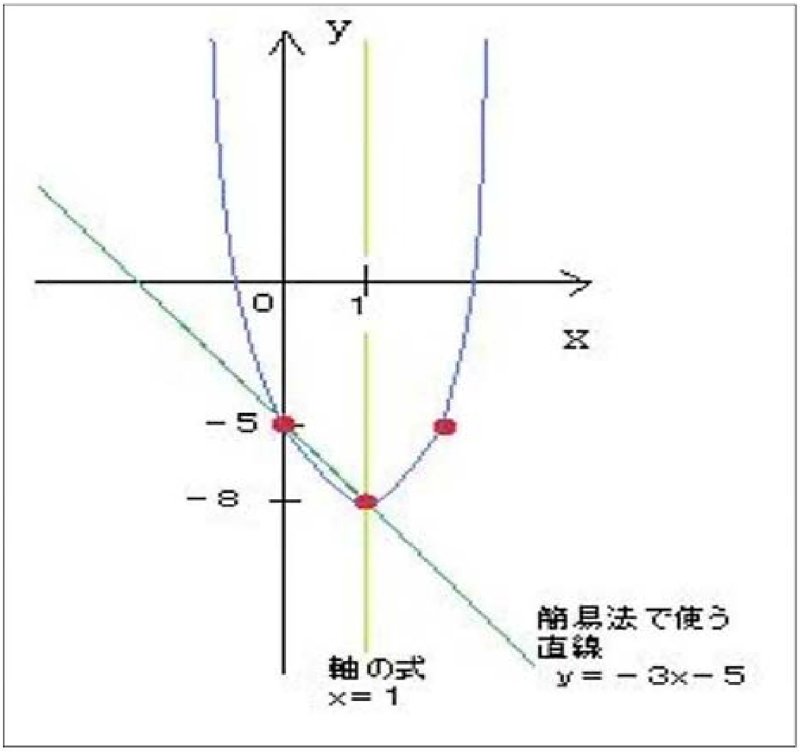
$$y = Bx+c$$

傾きがBで
y切片がc
の直線

つまり、軸の直線とｙ切片を通る直線ができたのだ。
この２本の直線が交わる点が頂点となるのは明らかである。なぜならば、この暗記すべき式は「頂点と係数の関係」から求められたからである。

それでは、この方法（「２直線を使った簡易法」と名付ける）で、２次関数のグラフを書いてみると、

$y＝3x^2-6x-5$のグラフを、今作った軸と直線で書いてみよう。



となる。ｂにあたる係数（－６）を２で割る（こういう事はよくある）とＢができあがる。**Ｂ＝－３**
そこで、ｘ＝－Ｂ÷ａ＝－（－３）÷ａ＝－（－３）÷（３）＝１
また、　ｙ＝Ｂｘ＋ｃ＝－３ｘ－５

この２つの直線の交点が頂点となる。あとは、「三点法」と同じようにグラフを書くと良い。なお、頂点のｙ座標はｘの値を代入すれば求まる。

ｙ＝－３・（１）－５＝－８

７．２次関数グラフ書きの演習（略）