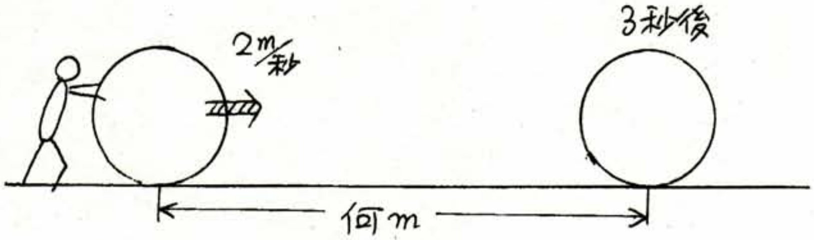
微分のプリント(1)　　　　年　組　番(　　　　　)

問1 平らな地面に、よく転がるボールを 2m/秒 の等速度で転がしたとき、3秒後に何m先にあるか。



6m先

問2 上と同じ問題で、次の表のように 1秒後, 2秒後, 4秒後, 5秒後を求めて、表を埋めよ。

時間	1秒	2秒	3秒	4秒	5秒
距離	2m	4m	6m	8m	10m

問3 上の表の時間を x 秒, 距離 y m とおいて、x と y の関数 $y=f(x)$ を求めよ。

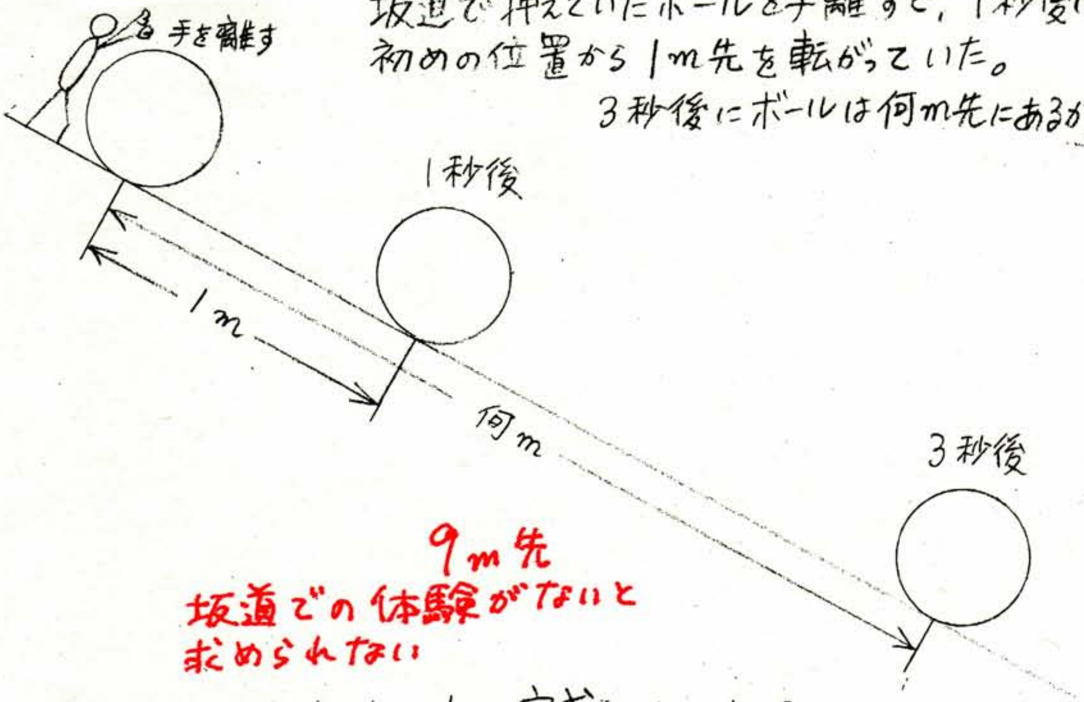
$$y = 2x$$

問4 等速度の 2m/秒 が、上の関数のどこに現われるでしょうか。

x の係数

微分のプリント(2)　　年　組　番氏名(　　　　)

問5　坂道で押えていたボールを手離すと，1秒後に初めの位置から1m先を転がっていた。
3秒後にボールは何m先にあるか。



9m先
坂道での体験がないと
求められない

問6　上と同じ問題で，次の表を完成させて，その関数 $y=f(x)$ を求めよ。

時間 x秒	1秒	2秒	3秒	4秒
距離 y m	1 m	4m	9m	16m

関数 $y = x^2$

問7　1秒後のボールの速度 v_1 と3秒後のボールの速度 v_3 を求めよ。

$$\begin{cases} v_1 = 2 \ \text{m/秒} \\ v_3 = 6 \ \text{m/秒} \end{cases}$$

微分がわからないと求められない
(存在するけど求めずらい量である)

微分のプリント(3)　　　年　組　番氏名(　　　　)

問8 前のプリントのように「存在するけど見えにくい量」の仲間をあげよ。

	(分布量)	位差量 (距離)
距離 (空間量)	濃度(g/cm^3) 密度	勾配(傾き) こうばい
(時間)	流速度(cm^3/s)	速度(m/s)

これらを「内包量」と言い、度と率が付くことが多い。
(ないほう)(ど)(りつ)

問9 度と率のちがいは何か。

度は $\text{密度} = \dfrac{\text{重さ}\ g}{\text{体積}\ cm^3}$, $\text{流速度} = \dfrac{\text{流量}\ cm^3}{\text{時間}\ s}$

$\text{速度} = \dfrac{\text{距離}\ m}{\text{時間}\ s}$ のように、単位がつくものをいう。

率は $\text{傾き} = \dfrac{y\text{方向の距離}\ cm}{x\text{方向の距離}\ cm} = \text{無単位}$ のようなものを率という。小数や分数で表わすことが多い。
なお、これらを100倍したのを百分率(パーセント)、1000倍したのを千分率(パーミル)という。

問10 上の量のように複雑ではなく、昔からよくでてきた量の仲間をあげよ。

時間、距離、重さ、体積 流量

これらを「外延量」と言う。
(がいえん)

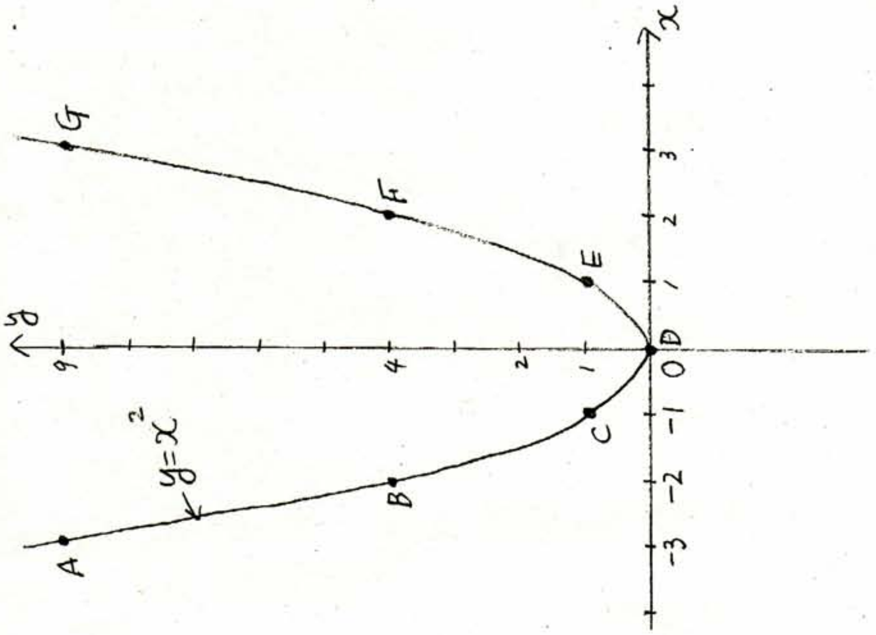
微分のプリント(4)　　　年　組　番氏名(　　　　　)

問11 前のプリントの問8の内包量(ないほう)の表の中で、唯一(ゆいいつ)目で見えて図に表わせるものは何か。また、その図形は何でしょう。

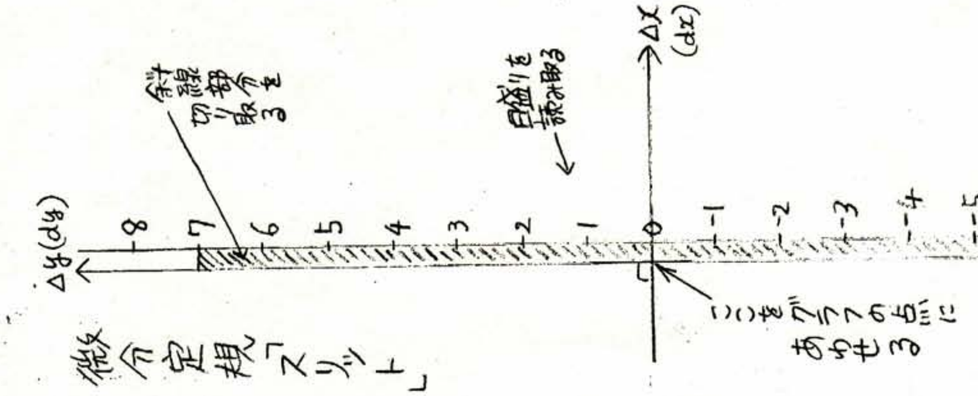
傾き

直角三角形

問12 前々のプリントの問6の関数 $y=x^2$ のグラフに、下の切り取ったスリットをあてて、目盛りを読み取り、表を埋めよ。



点	A	B	C	D	E	F	G
x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	9	4	1	0	1	4	9
スリット目盛	-2	-1.4	-0.5	0.2	0.6	1	2



微分のプリント(5)　　年　組　番氏名(　　　　　)

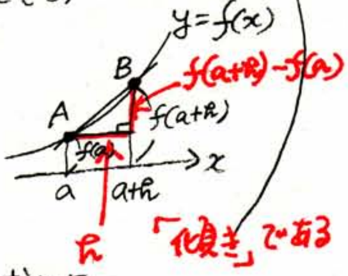
問13 前のプリントのスリットで、直角三角形の「傾き」を読み取ることが大変なので、計算の公式(平均変化率, 平均速度)を利用して求めよ。 誤差もでる

平均変化率

xが a から $(a+h)$ まで変わるときの関数$f(x)$の平均変化率は

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

で求めることができる。



$f(x)=x^2$

$y=\boxed{x^2}$ のグラフで、

(1) 点D(0,0) における平均変化率を $a=0$ とおいて求めよ。

$$\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\frac{(0+h)^2-(0)^2}{h}=\frac{h^2-0}{h}=h$$

(2) 点E(1, 1) における平均変化率を, $a=1$ とおいて

$$\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\frac{(1+h)^2-(1)^2}{h}=\frac{(1+2h+h^2)-(1)}{h}$$

$$=\frac{2h+h^2}{h}=2+h$$

(3) 点F(2,4)　　$a=2$ とおいて

$$\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=\frac{(2+h)^2-(2)^2}{h}=\frac{(4+4h+h^2)-(4)}{h}$$

$$=\frac{4h+h^2}{h}=4+h$$

(4) 点G(3,9)　　$a=3$ とおいて

$$\frac{f(3+h)-f(3)}{h}=\frac{(3+h)^2-(3)^2}{h}=\frac{(9+6h+h^2)-(9)}{h}$$

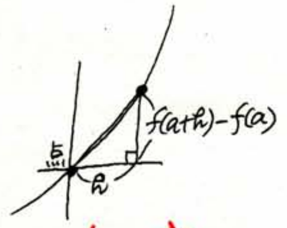
$$=\frac{6h+h^2}{h}=6+h$$

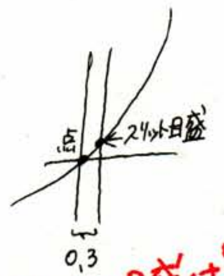
問14 上の問の(1), (2), (3), (4)の平均変化率に、$h=0.3$ を代入して、問12のスリットの目盛と比べよ。

点	D	E	F	G
平均変化率	0.3	2.3	4.3	6.3
スリット目盛	0.2	0.6	1	2

微分のプリント(6)　　年　組　番(　　　　　　　)

□問15 前のプリントの問14で求めた平均変化率とそのスリット目盛の関係はどうなるか考えよ。





平均変化率は
傾き

スリットの目盛は「高さ」のみなので、
傾きを出すには、0.3で割る

□問16 スリットの間隔(かんかく)を狭(せま)くするか、平均変化率の直角三角形の底辺の長さ h を小さくすると、点における速度が求まると思うが、小さくすると消えてしまって、傾き(速度)が0に(傾き)なると言う人もいるのだが、それに反論してみよう。

例えば、点Fにおける平均変化率は4.3

傾きは $\dfrac{\text{高さ}}{\text{スリット}}$ だから

$$\frac{1}{0.3}=\frac{10}{3}=3.3\cdots$$

まだ誤差があるが、傾きは消えないで存在する。

□問17 時間 x と距離 y の関数 $y=x^2$ において、$x=2$ における速度(瞬間(しゅんかん)速度)を平均変化率から求めて見て、計算上速度が0にならないことを確認してみよう。

$$\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=\frac{(2+h)^2-(2)^2}{h}=\frac{(4+4h+h^2)-(4)}{h}=\frac{4h+h^2}{h}$$

$$=4+h$$

次に、$h\to 0$(限りなく0に近づけると)、

$x=2$ における速度は、

$f'(2)=$ 4 m/s

ダッシュ
記号は速度を求めるときの「微分の記号」である。

微分のプリント（7）　　　年　組　番（　　　　）

問18 前のプリントの問17をスムーズに計算するために，数学では記号を取り入れているが，その記号の意味を確認せよ。

$$f'(2) = \lim_{h \to 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h}$$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{(2+h)^2 - (2)^2}{h}$$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{(4+4h+h^2) - (4)}{h}$$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{4h + h^2}{h}$$
$$= \lim_{h \to 0} (4 + h)$$
$$= 4$$

$f'(2)$ は $x=2$ における速度だが，数学では「微分係数」と言う。

$\lim_{h \to 0}$ は「リミットhが0」と読むが，「極限」の記号

$\frac{f(2+h)-f(2)}{h}$ は「傾き」

$f(2+h)$ は $f(x)$ の x に $(2+h)$ を代入したもので，左では $f(x) =$「$(2+h)^2$」

問19 $f(x) = x^2$ について，問18を参考に求めよ。（これは問7の解答になる。）

(1) $x=1$ のとき

$$f'(1) = \lim_{h \to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h}$$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{(1+h)^2 - (1)^2}{h}$$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{(1+2h+h^2) - (1)}{h}$$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{2h + h^2}{h}$$
$$= \lim_{h \to 0} (2 + h)$$
$$= 2$$

$f'(1) = \boxed{2}$ より，

$v_1 = \boxed{2}$ m/s

(2) $x=3$ のとき

$$f'(3) = \lim_{h \to 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{h}$$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{(3+h)^2 - (3)^2}{h}$$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{(9+6h+h^2) - (9)}{h}$$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{6h + h^2}{h}$$
$$= \lim_{h \to 0} (6 + h)$$
$$= 6$$

$f'(3) = \boxed{6}$ より，

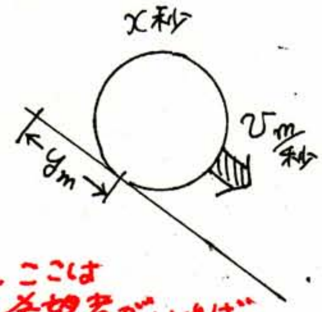
$v_3 = \boxed{6}$ m/s

微分のプリント（8）　年　組　番（　　　　）

問20 坂道をボールが転がる関数 $y=x^2$（$f(x)=x^2$ とも書く）において次の表を完成させてから、速さを表わす関数を求めよ。

時間 x 秒	1秒	2秒	3秒	4秒
距離 y m	1m	4m	9m	16m
速さ v m/秒	2 m/秒	4 m/秒	6 m/秒	8 m/秒

←ここは希望者がいればやってもらう



速さを表わす関数 v（$f'(x)$ を利用しよう）は、

$f'(x)=\boxed{2x}$ …

問21 上の $f'(x)$ を導関数（どう）と言い、今までの $f'(1)$ や $f'(2)$ のことを微分係数（びぶん）と言う。なお、導関数を求めると、その式の x に1や2を代入すれば、個々の微分係数が求まるので便利である。この導関数を求めることを「微分する」と言う。

上の $f(x)=x^2$ から $f'(x)=\boxed{2x}$ を簡単に求めるにはどう考えればよいか。

x^2 の指数2を x の係数にして、
x の指数を1つ減らす

問22 上の問を参考に、$f(x)=x^3$ から $f'(x)$ を求めよ。

$f'(x)=\boxed{3x^2}$

微分のプリント (9)　　　年　組　番(　　　　　)

問23 前のプリントの問22の推理が正しいかどうかは、下のようにして確認するのだが、普通には、この推理をまとめた「微分の公式」で計算すると良い。

$$f(x) = x^3 \text{ より } f(x+h) = (x+h)^3$$

f(a+h) と f(a) のかわりに f(x+h) と f(x) で計算する

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(x^3+3x^2h+3xh^2+h^3) - (x^3)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(3x^2h+3xh^2+h^3)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} (3x^2+3xh+h^2)$$

$$= \boxed{3x^2}$$

← どうでしたか。同じになりましたか。この上の計算を「導関数の定義」と呼んでいます。

$(x+h)^3$ は $(x+h)$ を3回かける

$(x+h)^2 = x^2+2xh+h^2$ より

$$\begin{array}{r} x^2+2xh+h^2 \\ \times)\quad x+h \\ \hline hx^2+2xh^2+h^3 \\ x^3+2x^2h+h^2x \\ \hline x^3+3x^2h+3xh^2+h^3 \end{array}$$

問24 前のプリントの問1と問2より「微分の公式」を作ってみよう。

$$f(x) = x^2 \text{ より } f'(x) = \boxed{2x}$$

$$f(x) = x^3 \text{ より } f'(x) = \boxed{3x^2}$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$f(x) = x^n \text{ のとき } f'(x) = \boxed{n\,x^{n-1}}$$

まとめて

$$(x^n)' = \boxed{n\,x^{n-1}}$$

微分の公式

( ) の外に ′ をつけると、中身を微分することになる

微分のプリント (10)　　年　組　番(　　　　　)

問25 いろいろな現象を表現する関数は、普通次のような形をしていることが多い。この関数の内包量を表わす導関数はどのようにして求めるか。

$y = ax^3 + bx^2 + c$ の場合では、

(a, b 各項の係数
c は定数項)

この a, b, c などは、x がどう変化しても不変なので、微分の計算では、次のように考えると良い。

$$y' = (ax^3 + bx^2 + c)'$$
$$= (ax^3)' + (bx^2)' + (c)'$$
$$= a(x^3)' + b(x^2)' + c(1)'$$

ここで、微分の公式を利用して、

$$= a \times \boxed{3x^2} + b \times \boxed{2x} + c \times \boxed{0}$$
$$= \boxed{3ax^2 + 2bx}$$

問26 a, b などの係数を具体的にして、導関数を求めてみよう。(微分する)

$$y = x^3 - 2x^2 - 3$$
$$y' = (x^3 - 2x^2 - 3)'$$
$$= (x^3)' - 2(x^2)' - 3(1)'$$
$$= 3x^2 - 2 \times 2x - 3 \times 0$$
$$= 3x^2 - 4x$$

暗算で求められるようにもなる。
「存在するけど見えにくい量」が暗算でも求められる量にできることが「数学(微分)の威力(いりょく)」である。