積分のプリント(1)　年　組　番(武田)

問1 紀元前287年に、現在のイタリアのシシリー島のシラクサに生まれた $\boxed{\text{アルキメデス}}$ は、黄金の王冠（おうかん）に銀が混っていることを浮力の原理で発見し、「分かったぞ!」と叫びながら風呂から裸で飛び出したと言う逸話（いつわ）で有名である。その彼が次の図の面積を計算し、積分の基本的アイデアである $\boxed{\text{取り尽し法}}$（つく）を編み出した。

1

$1+\frac{1}{4}=1.25$

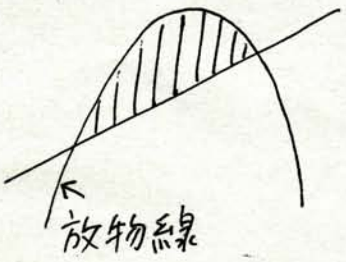
$1+\frac{1}{4}+\frac{1}{16}=1.312$

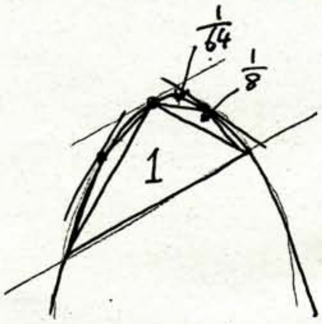
$1+\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{64}$

$=1.328$

$\vdots$

$1.333=\boxed{\frac{4}{3}}$



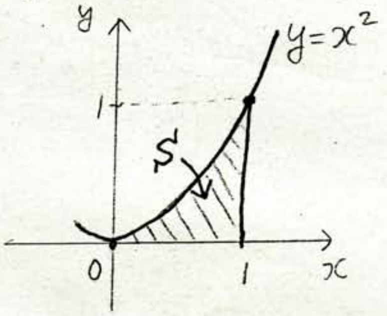


$$1+\frac{1}{8}\times 2+\frac{1}{64}\times 4+\cdots\cdots$$

$$=1+\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\cdots\cdots$$

$$=\boxed{\frac{4}{3}}$$

問2 年月が経過し、17世紀になって、面積や体積を求めるために、上のアイデアが使われはじめた。$y=x^2$ のグラフの $x=0$ から $x=1$ までの斜線部分の面積 S を求めるために使ったのは、どの方法だろうか。



(1) 水や砂の詰め物を利用

↓

(2) 紙や板を加工して重さで計算

↓

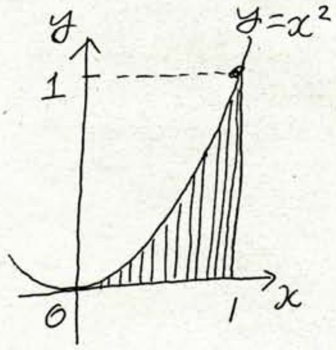
(3) 小さな正方形を埋めつくして計算

↓

(4) 細長い短冊を利用

積分のプリント(2)　　年　組　番(　　　　)

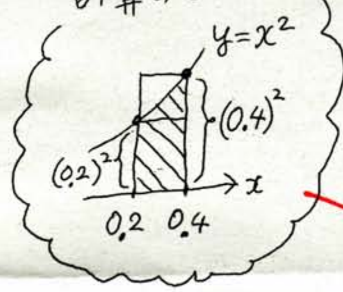
$\boxed{\text{問3}}$ 問2の方法で、$y=x^2$ の $x=0$ から $x=1$ までの斜線部分の面積 S を求める作業を分担して行ってみよう。



	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	
xの範囲	0 〜 0.2	0.2 〜 0.4	0.4 〜 0.6	0.6 〜 0.8	0.8 〜 1	計
微小面積	0.004	0.02	0.052	0.1	0.164	0.34

5等分したときの面積

計算のしかた



(1)
$$\frac{0^2+0.2^2}{2}\times(0.2-0)$$
$$=\frac{0.04\times 0.2}{2}=0.004$$

(2)
$$\frac{0.2^2+0.4^2}{2}\times(0.4-0.2)$$
$$=\frac{0.2\times 0.2}{2}=0.02$$

0.16
0.36

(3)
$$\frac{0.4^2+0.6^2}{2}\times(0.6-0.4)$$
$$=\frac{0.52\times 0.2}{2}=0.052$$

$$\begin{array}{r} 0.004 \\ 0.02 \\ 0.052 \\ 0.1 \\ +)\ 0.164 \\ \hline 0.340 \end{array}$$

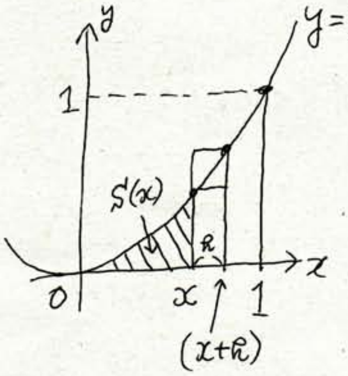
(4)
$$\frac{0.6^2+0.8^2}{2}\times(0.8-0.6)$$
$$=\frac{1\times 0.2}{2}=0.1$$

0.36
0.64

(5)
$$\frac{0.8^2+1^2}{2}\times(1-0.8)$$
$$=\frac{1.64\times 0.2}{2}=0.164$$

積分のプリント(3)　　年　組　番(　　　　　)

問4 前のプリントの問3の計算を細かくやっていくのは大変なので、端折(はしょ)って1つだけでやる方法を編み出してみると、



(1) 0からxまでの面積を $\boxed{S(x)}$ とする。

↑
面積関数

(2) 0から$(x+h)$までの面積を $\boxed{S(x+h)}$ とする。

(3) (2)から(1)を引くと、1本だけ細長い図形(短冊)ができるので、その面積を計算せよ。

$$\frac{x^2+(x+h)^2}{2}\times h$$
$$=\frac{x^2+x^2+2hx+h^2}{2}\times h$$
$$=\frac{2x^2+2hx+h^2}{2}\times h$$
$$=\left(x^2+hx+\frac{h^2}{2}\right)\times h$$
$$=x^2h+xh^2+\frac{1}{2}h^3$$

$$S(x+h)-S(x)=x^2h+xh^2+\frac{1}{2}h^3$$
$$\frac{S(x+h)-S(x)}{h}=x^2+xh+\frac{1}{2}h^2$$

(4) 巾(はば)のhを0に近づけると、このままだと1本の短冊の面積は消えてしまうので、一工夫すると、

$$\lim_{h\to 0}\frac{S(x+h)-S(x)}{h}=$$

$$\lim_{h\to 0}\left(x^2+xh+\frac{1}{2}h^2\right)$$
$$\boxed{\begin{aligned}&=x^2+x\cdot 0+\tfrac{1}{2}\cdot 0^2\\&=x^2\end{aligned}}$$

微分の定義より、

$$S'(x)=\boxed{x^2}$$

微分の逆向きの計算を編み出せば、面積関数$S(x)$が求められるので、その計算を $\boxed{\text{不定積分}}$ と言う。

積分のプリント(4)　　　年　組　番(　　　　　)

問5　微分の公式 $(x^n)' = n x^{n-1}$ を、逆向きの計算ができるように直してみよう。

$$\frac{1}{\boxed{n}}(x^n)' = \boxed{x^{n-1}}$$

係数は微分の計算に影響されないから、( )′の中に入れて、

$$\Big(\underbrace{\boxed{\tfrac{1}{n}x^n}}_{①}\Big)' = \underbrace{\boxed{x^{n-1}}}_{②}$$

( )′は微分の記号なので、その逆計算の積分の記号をいろいろ考えた。′(ダッシュ)はスピード感があるので、速度の計算として「微分」に用いた。これと同じ感覚で、面積を求める計算の「積分」の記号にSを上下にのばした ∫ (インテグラル)を使うことになる。

$$\int \underbrace{\boxed{x^{n-1}}}_{②} = \underbrace{\boxed{\tfrac{1}{n}x^n}}_{①}$$

問6　その後、時間をかけて不都合を修正していった。

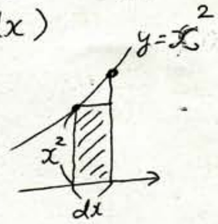
(1) 指数の n を覚えやすいように修正

$$\int x^n = \frac{1}{\boxed{n+1}} x^{\boxed{n+1}}$$

x方向の小さな横巾

(2) 細長い短冊をイメージさせるために、横巾も (dx) を追加

$$\int x^n\,dx = \frac{1}{\boxed{n+1}} x^{\boxed{n+1}}$$



(3) 定数項を微分すると0となり消えていたのが、逆計算では復活するので、それをまとめてC(積分定数)を必ず後ろに追加した。

$(3)'=0$
$(-5)'=0$
$(0)'=0$
$(C)'=0$

$$\underbrace{\int x^n\,dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + C}_{\text{不定積分の定義}}$$

積分のプリント (5)　　　年　組　番(　　　　　)

$\boxed{問7}$ 前のプリントの不定積分の定義を利用して、問2の正しい値を求めると、次のようになる。

放物線 $y=x^2$ の下にできる面積関数 $S(x)$ は、
まず、不定積分して、

$$\int x^2\,dx = \boxed{\frac{1}{3}x^3 + C}$$

したがって

$$S(x) = \boxed{\frac{1}{3}x^3 + C}$$

この $S(x)$ は $x=$0からxまでの面積なので、
xに1を入れると、問2の0から1までの面積になる。

$$S(1) = \boxed{\frac{1}{3} + C} \quad \cdots\cdots ①$$

このままでは、積分定数 C が不明のまま残るので、
$x=0$ を代入し、

$$S(0) = \boxed{C} \quad \cdots\cdots ②$$

この①と②を利用して、面積 S を求めるときは、
$x=0$ から 1 までの面積

$$S = S(1) - S(0)$$

とする。

したがって、

$$S = \boxed{\frac{1}{3}}$$

$=0.333$

← 問3と比べて精度はどうですか？ 0.34

$\boxed{問8}$ 上の問7をまとめて計算する方法が「定積分」といって、次のような記号の書き方をする。

$y=x^2$ の下の x が0から1までの面積 S は、

$$S = \int_0^1 x^2\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \left(\frac{1^3}{3}\right) - \left(\frac{0^3}{3}\right)$$

$$= \frac{1}{3} - 0 = \frac{1}{3}$$

（+Cは引くと相殺するので省略する）

上端 $\boxed{1}$

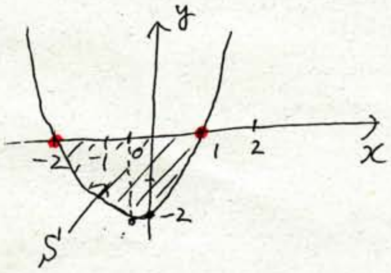
$$\int_{\boxed{0}}^{\boxed{1}} x^2 dx$$

下端 $\boxed{0}$

$\int_0^1 x^2 dx$ の読み方は「インテグラル0から1まで $x^2 dx$」と読む。

積分のプリント (6)　年　組　番(　　　　　　)

問9　$y=x^2+x-2$ のグラフと x 軸とで囲まれた斜線部分の面積 S を求めよ。



xが−2から1まで
下端　上端

$$S=-\int_{-2}^{1}(x^2+x-2)\,dx$$

(x軸の下にグラフがあるときはマイナスをつける)

$$=-\left[\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}-2x\right]_{-2}^{1}$$

$$=-\left\{\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-2\right)-\left(-\frac{8}{3}+2+4\right)\right\}$$

$$=-\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-2+\frac{8}{3}-6\right)$$

$$=-\left(\frac{9}{3}+\frac{1}{2}-8\right)$$

$$=\boxed{\frac{9}{2}}$$

← これが斜線部分の面積 S である。

$$=-\left(\frac{1}{2}-5\right)=-\frac{1-10}{2}=-\frac{-9}{2}=\frac{9}{2}$$

$S=4.5$

1目盛を1cmとすると

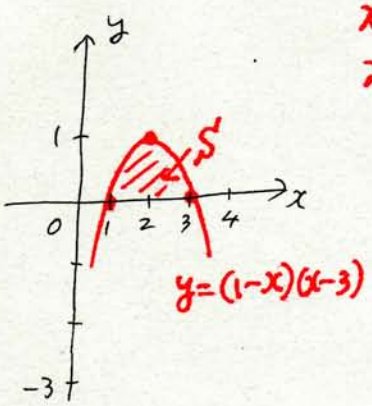
ここに水を入れると $4.5\,cm^2$

問10　$y=(1-x)(x-3)$ のグラフと x 軸とで囲まれた部分の面積 S を求めよ。

$x=1$ のとき $f(1)=0$

$x=3$ のとき $f(3)=0$

$x=2$ のとき $f(2)=(1-2)(2-3)=-1\times(-1)=1$



$$S=\int_{1}^{3}(1-x)(x-3)\,dx$$

$$=\int_{1}^{3}(-x^2+4x-3)\,dx$$

$$=\left[-\frac{x^3}{3}+\frac{4x^2}{2}-3x\right]_{1}^{3}$$

$$=(-9+18-9)-\left(-\frac{1}{3}+2-3\right)$$

$$=0+\frac{1}{3}+1$$

$$=\boxed{\frac{4}{3}}$$