

# 1 次不定方程式 $ax + by = c$ の解法指導

2013/02/15

武田利一

①  $ax + by = c$  を満たす整数の  $x$  と  $y$  を推理する。

(試しに、 $x$  に 1、2 を入れてみる。当てはまる  $y$  が分かれば、ok であるが、ダメな時はもう一回チャレンジして、 $x$  に 5 を入れてみる。)

② もし、該当する  $x=p$  (整数) と  $y=q$  (整数) があつたとき。

一つだけ解を言う時は、

$$x = p$$

$$y = q$$

が答えとなる。

また、一般解を答える時は次の形となる。

$$x = p - bk \quad (k \text{ は整数})$$

$$y = q + ak \quad (k \text{ は整数})$$

③ もし、該当する  $x$  と  $y$  が見つからないとき。

次のような方法で求める。(始めからこのやり方でやっても良い。)

$|a| > |b|$  とするとき、 $a = bm + e$  ( $m, e$  は整数) より

$$ax + by = c$$

$$by = c - ax$$

$$= c - (bm + e)x$$

$$y = (c - bmx - ex) / b$$

$$= -mx + (c - ex) / b$$

$c - ex = bn$  ( $n$  は整数) とおくと、

$$y = -mx + n \dots \dots (A)$$

また、変形して、

$$x = (c - bn) / e$$

$n$  に 1、2、3 などを代入して、 $x$  が整数になるのを探す。

その結果、 $x = p$  (整数)  $\dots \dots (B)$  ならば、その  $n$  と

これを (A) に代入して、 $y = q$  (整数)

一つだけ解を言う時は、 $x = p$ 、 $y = q$  が答えとなる。

また、一般解を答える時は次の形となる。

$$x = p - bk \quad (k \text{ は整数})$$

$$y = q + ak \quad (k \text{ は整数})$$

(例1) 1次不定方程式  $15x + 28y = 4$  の1つの解を求めよ。

$$15x = 4 - 28y \quad (28 = 15 \cdot 2 - 2 \text{ より})$$

$$x = \{4 - (30 - 2)y\} / 15$$

$$= (4 - 30y + 2y) / 15$$

$$= -2y + (4 + 2y) / 15$$

$$4 + 2y = 15n \text{ とおくと}$$

$$x = -2y + n$$

$$y = (15n - 4) / 2$$

より、

$$n = 2 \text{ のとき、} y = 26 / 2 = 13 \text{ (整数)}$$

$$x = -2 \cdot 13 + 2$$

$$= -24$$

したがって、1つの解は、 $x = -24$ ,  $y = 13$

(例2) 1次不定方程式  $14x - 11y = 700$  のすべての解を求めよ。

$$11y = 14x - 700 \quad (14 = 11 + 3 \text{ より})$$

$$y = \{(11 + 3)x - 700\} / 11$$

$$= (11x + 3x - 700) / 11$$

$$= x + (3x - 700) / 11$$

$$3x - 700 = 11n \text{ とおくと}$$

$$y = x + n$$

$$x = (700 + 11n) / 3$$

より、

$$n = 1 \text{ のとき、} x = 711 / 3 = 237 \text{ (整数)}$$

$$y = 237 + 1$$

$$= 238$$

したがって、すべての解は、

$$x = 237 + 11k \text{ (} k \text{ は整数)}$$

$$y = 238 + 14k \text{ (} k \text{ は整数)}$$