3次方程式の解法

例 漸化式 $a_n = 3\cdot a_{n-1} + a_{n-2} - a_{n-3}$ ($a_1=2, a_2=7, a_3=22, n \geqq 4$)の各項の比の極限($n\to\infty$)が近づく値を求めよ。(出題:坪井伸夫さんの「松の廊下と畳敷き」より)

解

$$\frac{a_n}{a_{n-3}} = 3\cdot\frac{a_{n-1}}{a_{n-3}} + \frac{a_{n-2}}{a_{n-3}} - 1 \quad \cdots ①$$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n-1}} = \lambda$ とおくと、

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n-3}} = \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n-1}}\times\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}\times\frac{a_{n-2}}{a_{n-3}} = \lambda^3$$

したがって

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n-1}}{a_{n-3}} = \lambda^2$, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n-2}}{a_{n-3}} = \lambda$ より、①の極限は、

3次方程式

$$\lambda^3 = 3\lambda^2 + \lambda - 1 \quad \cdots ②$$

の解が答えとなるので、この方程式を解いてみよう。

(ア) 2次の項を消す変形を行う

$$\lambda^3 - 3\lambda^2 - \lambda + 1 = 0$$

$\lambda = \rho - \frac{\lambda^2\text{の係数}}{3} = \rho + 1$ と置きかえると、

$$(\rho+1)^3 - 3(\rho+1)^2 - (\rho+1) + 1 = 0$$

$$\rho^3 + 3\rho^2 + 3\rho + 1 - 3\rho^2 - 6\rho - 3 - \rho - 1 + 1 = 0$$

$$\rho^3 - 4\rho - 2 = 0 \quad \cdots ③$$

(イ) 3次方程式 $x^3 + mx + n = 0$ の判別式 $D = \left(\frac{n}{2}\right)^2 + \left(\frac{m}{3}\right)^3$ は

$D>0$ のとき1実根と2虚根、$D<0$ のとき3実根より、

$$D = \left(\frac{-2}{2}\right)^2 + \left(\frac{-4}{3}\right)^3 = 1 - \frac{64}{27} < 0$$

(ウ) 3次方程式③を解法にもとづいて解いてみると、

$\rho = u + v$ とおき③に代入する

$$(u+v)^3 - 4(u+v) - 2 = 0$$

$$u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3 - 4(u+v) - 2 = 0$$

$$(u^3+v^3-2) + 3uv(u+v) - 4(u+v) = 0$$

$$(u^3+v^3-2) + (u+v)(3uv-4) = 0$$

この式が成り立つためには、

$$\begin{cases} u^3 + v^3 - 2 = 0 & \cdots ④ \\ 3uv - 4 = 0 & \cdots ⑤ \end{cases}$$

⑤を変形して

$$v = \frac{4}{3u} \quad \cdots ⑤'$$

④に代入して

$$u^3 + \left(\frac{4}{3u}\right)^3 - 2 = 0$$

両辺に u^3 をかけて

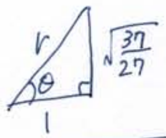
$$u^6 - 2u^3 + \frac{64}{27} = 0$$

$u^3 = t$ とおくと、

$$t^2 - 2t + \frac{64}{27} = 0$$

この2次方程式の解の公式より

$$t = 1 \pm \sqrt{1 - \frac{64}{27}} = 1 \pm \sqrt{\frac{37}{27}}\, i$$



$$r = \sqrt{1^2 + \left(\sqrt{\frac{37}{27}}\right)^2} = \sqrt{1 + \frac{37}{27}} = \sqrt{\frac{64}{27}}$$

$$= \frac{4}{3}\sqrt{\frac{4}{3}} = \frac{8}{3\sqrt{3}} = \frac{8\sqrt{3}}{9}$$

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{1}{r}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{9}{8\sqrt{3}}\right)$$

$$= \cos^{-1}\left(\frac{3\sqrt{3}}{8}\right)$$

虚数解となるので、これを極形式で表わすと、

$$t = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

$$= \frac{8\sqrt{3}}{9}(\cos\theta + i\sin\theta)$$

$u^3 = t$ より

$$u = \sqrt[3]{\frac{8\sqrt{3}}{9}}\left(\cos\frac{\theta}{3} + i\sin\frac{\theta}{3}\right) = \frac{2\sqrt{3}}{3}\left(\cos\frac{\theta}{3} + i\sin\frac{\theta}{3}\right) \quad \cdots\cdots ⑥$$

$$\sqrt[3]{\frac{8\sqrt{3}}{9}} = \left(2^3 \times 3^{\frac{1}{2}-2}\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$= 2 \times 3^{-\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

⑥を⑤'に代入して、

$$v = \frac{4}{3u} = \frac{4}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times \left\{\cos\left(-\frac{\theta}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\theta}{3}\right)\right\}$$

$$= \frac{2\sqrt{3}}{3}\left(\cos\frac{\theta}{3} - i\sin\frac{\theta}{3}\right) \quad \cdots\cdots ⑦$$

⑥⑦を $\rho = u + v$ に代入すると、

$$\rho = \frac{2\sqrt{3}}{3} \times 2\cos\frac{\theta}{3}$$

$$= \frac{4\sqrt{3}}{3}\cos\frac{\theta}{3} \quad \cdots\cdots ⑧$$

⑧を $\lambda = \rho + 1$ に代入すると、

$$\lambda = \frac{4\sqrt{3}}{3}\cos\frac{\theta}{3} + 1$$

$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{3\sqrt{3}}{8}\right)$ を代入して、

$$\lambda = \frac{4\sqrt{3}}{3}\cos\left\{\frac{1}{3}\cos^{-1}\left(\frac{3\sqrt{3}}{8}\right)\right\} + 1 \quad \cdots\cdots (答)$$

科学電卓より

$$\lambda = 3.214319743377535\cdots\cdots$$

(エ) 坪井さんの予想である一定値 3.21432…… に近づくと合致した。