完全順列の漸化式表示.(その後)

$$\boxed{a_1=0,\ a_2=1,\ a_n=(n-1)(a_{n-1}+a_{n-2}),\ n\geqq 3} \quad ①$$

をもとに、a_1～a_{10}を順次計算したところ

$a_3=2(1+0)=2$

$a_4=3(2+1)=9$

$a_5=4(9+2)=44$

$a_6=5(44+9)=265$

$a_7=6(265+44)=1854$

$a_8=7(1854+265)=14833$

$a_9=8(14833+1854)=133496$

$a_{10}=9(133496+14833)=1334961$

上6桁が一致

このことから、$\boxed{a_1=0,\ a_n=n\cdot a_{n-1}+(-1)^n,\ n\geqq 2}$ ②

を予想しました。②を変形して

$$a_n=(n-1)a_{n-1}+a_{n-1}+(-1)^n$$

$$=(n-1)\cdot a_{n-1}+(n-1)\cdot a_{n-2}+(-1)^{n-1}+(-1)^n$$

$$=(n-1)(a_{n-1}+a_{n-2})$$ となるので

①の表示と②の表示は同値。

①の表示から$\{a_n\}$の一般項a_nを示すのは、できませんでしたので、②の方からためしてみました。

② $\boxed{a_1=0,\ a_n=n\,a_{n-1}+(-1)^n\quad (n\geqq 2)}$ より

$a_2=2\cdot 0+1=1$

$a_3=3\times 1-1=2$

$a_4=4\cdot 2+1=9$

$a_5=5\cdot 9-1=44$ …このあたりで遡ってみると、

$=5(4\cdot 2+1)-1$

$=5\{4(3\cdot 1-1)+1\}-1$

$=5[4\{3(2\cdot 0+1)-1\}+1]-1$

$=5\cdot 4\cdot 3-5\cdot 4+5-1$

$=\frac{5!}{2}-\frac{5!}{3\cdot 2}+\frac{5!}{4\cdot 3\cdot 2}-\frac{5!}{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2}$

$=5!\left(\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}-\frac{1}{5!}\right)$ となり

$$\boxed{a_1=0,\ a_n=n!\sum_{k=2}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}\quad (n\geqq 2)}$$

が得られます。

尚、$\frac{9!}{a_9}=\frac{362880}{133496}=2.718283693\cdots$

$\frac{10!}{a_{10}}=\frac{3628800}{1334961}=2.718281657\cdots$

より $\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{a_n}=e$ が推定されます。

2013.8.23