2、正多面体の色分けについて.

(1) 頂点に関して.(n点からなる正N面体の場合)

[1頂点に集まる辺又は面の数をmとする。]

公式 $\boxed{\dfrac{n!}{m\cdot n}}$

(i) 正4面体: $\dfrac{4!}{3\cdot 4}=2$ 通り

(ii) 正6面体: $\dfrac{8!}{3\cdot 8}=1680$ 通り

(iii) 正8面体: $\dfrac{6!}{4\cdot 6}=30$ 通り

(iv) 正12面体: $\dfrac{20!}{3\cdot 20}=4,0548,3668,0294,4000$ 通り
京　兆

(v) 正20面体: $\dfrac{12!}{5\cdot 12}=798,3360$ 通り

(2) 辺に関して.(n辺からなる正N面体)

公式 $\boxed{\dfrac{n!}{2n}}$

(i) 正4面体: $\dfrac{6!}{2\cdot 6}=60$ 通り

(ii) 正6,8面体: $\dfrac{12!}{2\cdot 12}=1995,8400$ 通り

(iii) 正12,20面体: $\dfrac{30!}{2\cdot 30}$

$=442,0880,9968,6985,0977,2718,0800,0000$ 通り.
穣　予　垓　京　兆　億　万

(3) 面に関して.(正n角形N個からなる正N面体)

公式 $\boxed{\dfrac{N!}{n\cdot N}}$

(i) 正4面体: $\dfrac{4!}{3\cdot 4}=2$ 通り

(ii) 正6面体: $\dfrac{6!}{4\cdot 6}=30$ 通り

(iii) 正8面体: $\dfrac{8!}{3\cdot 8}=1680$ 通り

(iv) 正12面体：$\dfrac{12!}{5\cdot 12} = 798,3360$通り

(v) 正20面体：$\dfrac{20!}{3\cdot 20} = 4,0548,3668,0294,4000$通り

京　兆

※ これらの公式は、いずれも対称性から生まれたもの。

$$\text{場合の数} = \frac{(\text{色分け対象の数})!}{\text{各立体の対称の総数}} = \boxed{\frac{\text{象}!}{\text{称}}}$$

※ 正多面体の「対称の数」とは、正多面体をつるして見分けてみる。

(1) に関して：「どの頂点をつるすか」でn通り、その後どの向きにするかでm通り。よって$m\cdot n$通りのつるし方で見分けがつかない。

(2) に関して：「どの辺をつるすか」でn通り、その後辺の逆向きを考えて2通り。よって$2n$通りのつるし方で、見分けがつかない。

(3) に関して：「どの面の中心をつるすか」でN通り、その後どの向きにするかでn通り。よってnN通りのつるし方で、見分けがつかない。

上記〰部の数は、各立体特有の数であり（左ページの分母）正4面体では12、正6,8面体では24、正12,20面体では60となっている。

※ 面に関する色分けの発展として、サッカーボール型32面体について

① 32色から12色を選ぶ場合の数 $32!/12!\times 20!$

② 正5角形12面の色分け方の数 $12!/5\times 12$

③ 残り20面の色分け方の数 $20!$

$\therefore$ ①×②×③ $= \dfrac{32!}{60}$（分母の60は、この立体の「対称の数」である。）

$= 43,8551,3948,8948,9216,9453,6335,3600,0000$通り。

満　穣　予　垓　京　兆　億　万