No. 13　フィボナッチ数列をめぐって。　　月　日

(1) フィボナッチ数列の一般項を求めよ。

［定義］ $a_1=1,\ a_2=1,\ a_n=a_{n-1}+a_{n-2}\quad(n \geqq 3)$

(解) $a_n-\alpha\cdot a_{n-1}=\beta(a_{n-1}-\alpha\cdot a_{n-2})$ ――① とおくと

$a_n=(\alpha+\beta)a_{n-1}-\alpha\cdot\beta\ a_{n-2}$ となるから

定義の漸化式より $\alpha+\beta=1,\ \alpha\beta=-1$

即ち α,β は 2次方程式 $t^2-t-1=0$ の2解である。

(i) $\alpha=\dfrac{1+\sqrt5}{2},\ \beta=\dfrac{1-\sqrt5}{2}$ の場合 ①より 数列 $\{a_{n+1}-\alpha\cdot a_n\}$ は

初項 β，公比 β の等比数列となり、その一般項は

$$a_{n+1}-\frac{1+\sqrt5}{2}a_n=\frac{1-\sqrt5}{2}\times\left(\frac{1-\sqrt5}{2}\right)^{n-1}=\left(\frac{1-\sqrt5}{2}\right)^n \quad \text{――②}$$

(ii) $\alpha=\dfrac{1-\sqrt5}{2},\ \beta=\dfrac{1+\sqrt5}{2}$ の場合も同様にして

$$a_{n+1}-\frac{1-\sqrt5}{2}a_n=\frac{1+\sqrt2}{2}\times\left(\frac{1+\sqrt5}{2}\right)^{n-1}=\left(\frac{1+\sqrt5}{2}\right)^n \quad \text{――③}$$

③－②より $\left(\dfrac{1+\sqrt5}{2}-\dfrac{1-\sqrt5}{2}\right)\cdot a_n=\left(\dfrac{1+\sqrt5}{2}\right)^n-\left(\dfrac{1-\sqrt5}{2}\right)^n$

よって、次の一般項が得られる。

$$\boxed{a_n=\frac{1}{\sqrt5}\left\{\left(\frac{1+\sqrt5}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt5}{2}\right)^n\right\}}$$

この式は、$a_1=1,\ a_2=1$ となっているので、全ての自然数 n で成立する。

※ $\{a_n\}=1,1,2,3,5,8,13,21,34,55,89,\ \ldots$

この数列の例としては、「つがいのウサギの増え方」などが教科書の「コラム」などで、よく見うける。

(2) フィボナッチ数列がらみの問題例．

問1．長さがそれぞれ 1，2，34 の3本の線分がある。$2 < x < 34$ を満たす長さxの線分を5本仲間に入れ，計8本の線分で，「どの3本をとっても，3角形が作れない」ように，5本の長さを求めよ。

(解)

数列：$a_1 = 1$，$a_2 = 2$，$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$　$(n \geqq 3)$ を考えると，

$\{a_n\} = 1, 2, \underbrace{\boxed{3, 5, 8, 13, 21}}_{\text{長さ}x\text{の線分（求める長さ）}}, 34, \cdots$ となるが

どの3項 a_p, a_q, a_r $(p<q<r)$ をとっても，$a_p + a_q \leqq a_r$ となり，3角形は作れない。

問2．1段上り，又は2段上りを用いて10段を上る場合の数を求めよ。

(解)．「n段」を上る場合の数を a_n とすると，

$$a_n = \begin{cases} \text{はじめに1段上った場合：残り } a_{n-1} \text{ 通り．} \\ \quad〃\quad 2 \quad〃\quad〃\quad〃 \quad a_{n-2} \text{ 通り} \end{cases}$$

$\therefore a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$，あきらかに $a_1 = 1$，$a_2 = 2$ であるから

$\{a_n\} = 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, \cdots$ となる。

よって求める場合の数は，$a_{10} = \boxed{89}$ 通りである。

※ 上記2問は，両方とも，フィボナッチ数列の「第2項以後」を利用したものである。

　一般項は要求しておらず，「初期条件」，「漸化条件」を用いて順次必要な項を求めればよい。