No. 18　n個の完全順列の漸化式表示について

(1) n個の完全順列 a_n とは、

1
なし

1	2
2	1

(1通り)

1	2	3
2	3	1
3	1	2

(2通り)

1	2	3	4
2	1	4	3
2	3	4	1
2	4	1	3
3	1	4	2
3	4	1	2
3	4	2	1
4	1	2	3
4	3	1	2
4	3	2	1

(9通り)

上の数字の下に同じ数字を置かないような並べ方の数。

$a_1=0$, $a_2=1$, $a_3=2$, $a_4=9$, $a_5=?$

このような置き方で、a_n 求めてみよう。

1	2	3	4	$\cdots$	n

$(n-1)$行

2タイプ

2　1　$\cdots\cdots$ このタイプは a_{n-2} 通りある。

2　3　$\cdots$

2　4　$\cdots$

$\vdots$

2　n　$\cdots$

これらのタイプは、$\cdots$の所に出てくる1を2と読みかえれば a_{n-1} 通り

3　$\cdots\cdots$

4　$\cdots\cdots$

$\vdots$

n　$\cdots\cdots$

これらのタイプは、いずれも上記2タイプと同じだけある。

漸化式 ①
$$\boxed{a_n=(n-1)(a_{n-1}+a_{n-2}) \quad a_1=0,\ a_2=1,\ n\geqq 3}$$

(2) 漸化式 ① に従って、a_1 から順に並べてみると、

$a_1 = 0$

$a_2 = 1$

$a_3 = 2(1+0) = 2$

$a_4 = 3(2+1) = 9$

$a_5 = 4(9+2) = 44$

$a_6 = 5(44+9) = 265$

$a_7 = 6(265+44) = 1854$

$a_8 = 7(1854+265) = 14833$

$a_9 = 8(14833+1854) = 133496$

$a_{10} = 9(133496+14833) = 1334961$

何と数字の並びが殆んど同じ!!

(10倍+1となっている。)

このことから、第2の漸化式 ② $\boxed{a_n = n \cdot a_{n-1} + (-1)^n \quad a_1 = 0,\ n \geqq 2}$ を推定。

② を変形して $a_n = (n-1)a_{n-1} + a_{n-1} + (-1)^n$ とし

ここに再び ② を適用すると、

$= (n-1)a_{n-1} + (n-1) \cdot a_{n-2} + (-1)^{n-1} + (-1)^n$

$= (n-1)(a_{n-1} + a_{n-2})$ となるので

漸化式 ② と、漸化式 ① とは、同値である。

(3). 漸化式 ② $a_n = n \cdot a_{n-1} + (-1)^n \quad (a_1 = 0,\ n \geqq 2)$
を用いて、a_1 から順に並べてみる。

$a_1 = 0$

$a_2 = 2 \cdot 0 + 1 = 1$

$a_3 = 3 \cdot 1 - 1 = 2$

$a_4 = 4 \cdot 2 + 1 = 9$

$a_5 = 5 \cdot 9 - 1 = 44$ このあたりで「遡上表現」をしてみると、

$= 5 \cdot (4 \cdot 2 + 1) - 1$

$= 5\{4(3 \cdot 1 - 1) + 1\} - 1$

$= 5[4\{3 \cdot (2 \cdot 0 + 1) - 1\} + 1] - 1$

$= 5 \cdot 4 \cdot 3 - 5 \cdot 4 + 5 - 1$

$= 5!\left(\dfrac{1}{2!} - \dfrac{1}{3!} + \dfrac{1}{4!} - \dfrac{1}{5!}\right)$ と表せるから

一般に $\boxed{a_n = n! \sum_{k=2}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} \quad (a_1 = 0,\ n \geqq 2)}$

※右ページより、$e^x = 1 + \dfrac{x}{1!} + \dfrac{x^2}{2!} + \cdots + \dfrac{x^n}{n!} + \cdots$

ここで $x = -1$ とすると、$\dfrac{1}{e} = 1 + \dfrac{-1}{1!} + \dfrac{(-1)^2}{2!} + \cdots + \dfrac{(-1)^n}{n!} + \cdots$

$$= \lim_{n \to \infty} \sum_{k=2}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$$

この式と、上記 a_n の式との関係から $\dfrac{a_n}{n!} \longrightarrow \dfrac{1}{e}$

即ち、$\displaystyle\lim_{n \to \infty} \frac{n!}{a_n} = e$ が確認される。

(4) 完全順列 a_n と自然対数の底 e との関係。

$a_1=0$, $a_n = n \cdot a_{n-1} + (-1)^n \quad (n \geqq 2)$ を用いた e の近似。

$$\frac{2!}{a_2} = \frac{2}{1} = 2$$

$$\frac{3!}{a_3} = \frac{6}{2} = 3$$

$$\frac{4!}{a_4} = \frac{24}{9} = 2.\dot{6}$$

$$\frac{5!}{a_5} = \frac{120}{44} = 2.\dot{7}\dot{2} = \boxed{\frac{30}{11}}$$ これは e の近似分数として有効。

$$\frac{6!}{a_6} = \frac{720}{265} = 2.716\cdots$$

$$\frac{7!}{a_7} = \frac{5040}{1854} = 2.7184\cdots$$

$$\frac{8!}{a_8} = \frac{40320}{14833} = 2.71826\cdots$$

$$\frac{9!}{a_9} = \frac{362880}{133496} = 2.7182816\cdots$$

$$\frac{10!}{a_{10}} = \frac{3628800}{1334961} = 2.71828184\cdots$$ (小数第7桁まで有効)

このように、e の近似として、$\{a_n\}$ の利用は大変有効である。

※ マクローリン展開

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots$$