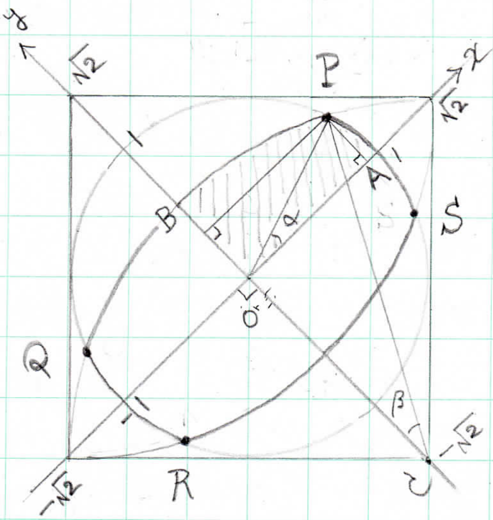
「太る形」の面積。

問、図のように、半径1の円と、半径2の円で囲まれた「太る形」PQRSの面積を求めよ。



(解) 図のように座標軸をとり、第1象限部分の面積をSとする。

$$\begin{cases} y=\sqrt{1-x^2} \\ y=\sqrt{4-x^2}-\sqrt{2} \end{cases}$$

この連立方程式からPの座標は、$P\left(\dfrac{\sqrt{14}}{4}, \dfrac{\sqrt{2}}{4}\right)$

$$S = \text{扇形}OAP + \text{扇形}CBP - \triangle OCP$$

$$= \frac{1}{2}\cdot 1^2\cdot\alpha + \frac{1}{2}\cdot 2^2\cdot\beta - \frac{1}{2}\cdot 2\cdot\sqrt{2}\cdot\sin\beta$$

$$= \frac{1}{2}\sin^{-1}\frac{\sqrt{2}}{4} + 2\cdot\sin^{-1}\frac{\sqrt{14}}{8} - \sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{14}}{8}$$

$$\therefore 4S = \boxed{2\cdot\sin^{-1}\frac{\sqrt{2}}{4} + 8\cdot\sin^{-1}\frac{\sqrt{14}}{8} - \sqrt{7}}$$

※図より

$$\sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$\therefore \alpha = \sin^{-1}\frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$\sin\beta = \frac{\sqrt{14}}{8}$$

$$\therefore \beta = \sin^{-1}\frac{\sqrt{14}}{8}$$

(別解) [定積分を用いて]

※ $x = \sin t$ とおくと $(t = \sin^{-1}x)$

$$\frac{dx}{dt} = \cos t$$

x	$\frac{\sqrt{14}}{4} \to 1$
t	$\sin^{-1}\frac{\sqrt{14}}{4} \to \frac{\pi}{2}$

$x = 2\sin t$ とおくと $\left(t = \sin^{-1}\dfrac{x}{2}\right)$

$$\frac{dx}{dt} = 2\cdot\cos t$$

x	$0 \to \frac{\sqrt{14}}{4}$
t	$0 \to \sin^{-1}\frac{\sqrt{14}}{8}$

$$\int \sqrt{1-x^2}\,dx$$

$$= \int \sqrt{1-\sin^2 t}\cdot \cos t\,dt$$

$$= \int \cos^2 t\,dt = \int \frac{1+\cos 2t}{2}\,dt$$

$$= \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\sin 2t + C$$

$$\int \left(\sqrt{4-x^2} - \sqrt{2}\right)dx$$

$$= \int \left(\sqrt{4-4\cdot\sin^2 t} - \sqrt{2}\right) 2\cos t\,dt$$

$$= 2\int \left(2\cdot\cos t - \sqrt{2}\right)\cdot \cos t\,dt$$

$$= 4\int \cos^2 t\,dt - 2\sqrt{2}\cdot\int \cos t\,dt$$

$$= 2t + \sin 2t - 2\sqrt{2}\cdot\sin t + C$$

$$S = \int_0^{\frac{\sqrt{14}}{4}} \left(\sqrt{4-x^2} - \sqrt{2}\right)dx + \int_{\frac{\sqrt{14}}{4}}^{1} \sqrt{1-x^2}\,dx$$

$$= \Big[2t + \sin 2t - 2\sqrt{2}\sin t\Big]_0^{\sin^{-1}\frac{\sqrt{14}}{8}} + \Big[\frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\sin 2t\Big]_{\sin^{-1}\frac{\sqrt{14}}{4}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \left(2\cdot\sin^{-1}\frac{\sqrt{14}}{8} + 2\cdot\frac{\sqrt{14}}{8}\cdot\frac{5\sqrt{2}}{8} - 2\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{14}}{8}\right) + \frac{\pi}{4} - \left(\frac{1}{2}\cdot\sin^{-1}\frac{\sqrt{14}}{4} + \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{14}}{4}\cdot\frac{\sqrt{2}}{4}\right)$$

$$= \left(2\cdot\sin^{-1}\frac{\sqrt{14}}{8} + \frac{5\sqrt{7}}{16} - \frac{\sqrt{7}}{2}\right) + \frac{\pi}{4} - \left(\frac{1}{2}\sin^{-1}\frac{\sqrt{14}}{4} + \frac{\sqrt{7}}{16}\right)$$

$$= \frac{\pi}{4} - \frac{\sqrt{7}}{4} + 2\sin^{-1}\frac{\sqrt{14}}{8} - \frac{1}{2}\sin^{-1}\frac{\sqrt{14}}{4}$$

$$\therefore 4S = \boxed{\pi - \sqrt{7} + 8\cdot\sin^{-1}\frac{\sqrt{14}}{8} - 2\cdot\sin^{-1}\frac{\sqrt{14}}{4}}$$

※

図より，$\sin^{-1}\frac{\sqrt{14}}{4} = \pi - \sin^{-1}\frac{\sqrt{2}}{4}$ とおけば

前ページの $4S$ の式と同値であることが確認できる。