学修支援センター、数学力コンテストより

問1、7で割ると1余り、11で割ると2余り、13で割ると3余る整数で、5000～10000の間にあるものを全て求めよ。

(解) $N = 7x+1 = 11y+2 = 13z+3$ (x, y, z は整数)
(1) (2)

(1)より $7x - 11y = 1$ ——①

$7\times 8 - 11\times 5 = 1$ ——②

①−②より

$7(x-8) - 11(y-5) = 0$

$\therefore 7(x-8) = 11(y-5)$

(7, 11は互に素であるから)

$x - 8 = 11k_1$

$x = 11k_1 + 8$ (k_1 は整数)

よって、 $N = 77k_1 + 57$

(2)より $11y - 13z = 1$ ——①

$11\times 6 - 13\times 5 = 1$ ——②

①−②より

$11(y-6) - 13(z-5) = 0$

$\therefore 11(y-6) = 13(z-5)$

(11, 13は互に素であるから)

$y - 6 = 13k_2$

$\therefore y = 13k_2 + 6$ (k_2 は整数)

よって $N = 143k_2 + 68$

次に $77k_1 + 57 = 143k_2 + 68$ より

$77k_1 - 143k_2 = 11$

$\therefore 7k_1 - 13k_2 = 1$ ——①

$7\times 2 - 13\times 1 = 1$ ——②

①−②より $7(k_1 - 2) - 13(k_2 - 1) = 0$

$7(k_1 - 2) = 13(k_2 - 1)$

7, 13は互に素であるから、 $k_1 - 2 = 13k_3$ (k_3 は整数)

$\therefore k_1 = 13k_3 + 2$

よって $N = 77k_1 + 57 = 77(13k_3 + 2) + 57 = 1001k_3 + 211$

ここで $5000 < N < 10000$
であるから求めるNは
右の5つの数である。
($k_3 = 5, 6, 7, 8, 9$ を代入)

$$\begin{cases} N = 1001\times 5 + 211 = \boxed{5216} \\ N = 1001\times 6 + 211 = \boxed{6217} \\ N = 1001\times 7 + 211 = \boxed{7218} \\ N = 1001\times 8 + 211 = \boxed{8219} \\ N = 1001\times 9 + 211 = \boxed{9220} \end{cases}$$

月　日　No.

問2．$(n+2)!-n!$ が 11^6 で割切れる最小の自然数 n を求めよ。

（解）与式 $= n!(n+1)(n+2)-n!$

$= n!\{(n+1)(n+2)-1\} = n!(n^2+3n+1)$ が因数として

11を6コ含む必要がある。

$n^2+3n+1=11$ とすると $n^2+3n-10=(n+5)(n-2)=0$ より $n=2$（不適）

$n^2+3n+1=11^2$　〃　$n^2+3n-120=0$ の整数解なし。

$n^2+3n+1=11^3$　〃　$n^2+3n-1330=0$

$$n=\frac{-3\pm\sqrt{9+5320}}{2}=\frac{-3\pm\sqrt{5329}}{2}=\frac{-3\pm 73}{2}$$

$=35$（整数解 >0），-38（不適）

よって $n=35$ のとき 与式 $=35!\times 11^3$

$35!$ の部分に因数として 11, 22, 33 があり11が3コ

全体として 11^6 が因数として含まれている。∴ $\boxed{n=35}$

※ $n=35$ が最小の自然数であることの確認として

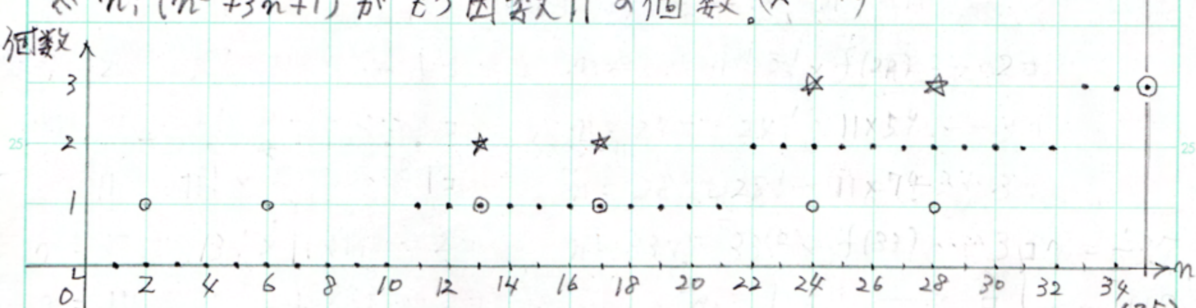
$f(n)=n^2+3n+1$ とすると、$n=35$ のとき、$n!\,f(n)$ は因数として11を6コもっている。又、$f(n)$ は因数11を3コもっている。$1\leqq n\leqq 34$（n：自然数）に対して $n!$ には、因数11を最大3コ内在し、$1\leqq x\leqq 34$（x：実数）に対して $f(x)=x^2+3x+1$ は、増加。　従って $f(n)$ は、

$1\leqq n\leqq 34$ で因数11を、3コ以上もつことはない。最大で2コ。

よって $1\leqq n\leqq 34$ で $n!\,f(n)$ のもつ因数11は高々5コ。

（実際は、高々3コ）

※ $\overset{\bullet}{n}!\,(\overset{\circ}{n^2}+3n+1)$ がもつ因数11の個数。（★＝・＋○）



No.　　　　月　　日

問3、$f(n)=$（nの各位の積）；（$n \geqq 0$, 整数）とする。

(1). nは4桁で $f(n)=210$ となる最大のnを求めよ。

（解）$210=1\times5\times6\times7$ より　$n=\boxed{7651}$

（210を4つの自然数の積として表す。）…1を入れてもよい!!

(2) nは5桁で、$f(n)=1024$ となるnはいくつあるか。

（解）$1024=2^{10}$ であるから、10を0, 1, 2, 3を5個用いた和で、

(i) $10=0+1+3+3+3$ の場合
$n=12888$ などの並べかえ、 $\Big\}$ $\dfrac{5!}{3!}=20$ コ

(ii) $10=0+2+2+3+3$ の場合
$n=14488$ など $\Big\}$ $\dfrac{5!}{2!2!}=30$ コ

(iii) $10=1+1+2+3+3$ の場合
$n=22488$ など $\Big\}$ $\dfrac{5!}{2!2!}=30$ コ

(iv) $10=1+2+2+2+3$ の場合
$n=24448$ など $\Big\}$ $\dfrac{5!}{3!}=20$ コ

(v) $10=2+2+2+2+2$ の場合
$n=44444$ のみで $\Big\}$ 1コ

以上、合計　$\boxed{101\text{コ}}$

(3) $f\{f(2005\times n)\}\neq0$ となる最小のnを求めよ。

（解）条件より $2005\times n$ に0が現れないためには、
$n>20$ で、奇数（偶数では、末尾が0）

∴ $n=21, 23, \cdots$ と順にためしてみると

$2005\times21=42105$（10の位に0が現れている。）

$2005\times23=46115$ で 0が現れない。

よって、nの最小値は $\boxed{23}$

2016. 6. 12