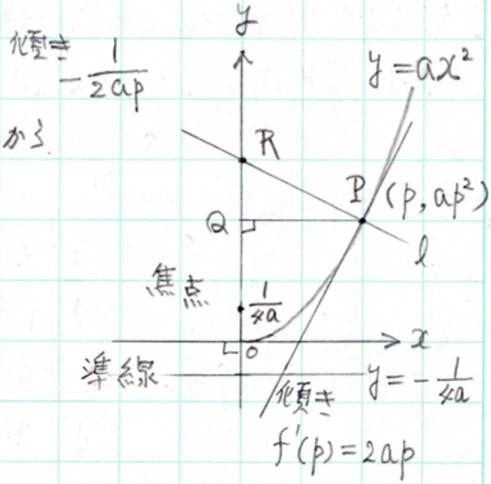
(1) $y=f(x)=ax^2\ (a>0)$ とする。

曲線上の頂点以外の任意の点を $P(p,\ ap^2)$ とする。



P での法線の傾きは、$-\frac{1}{2ap}$ であるから

l の式は、$y-ap^2=-\frac{1}{2ap}(x-p)$

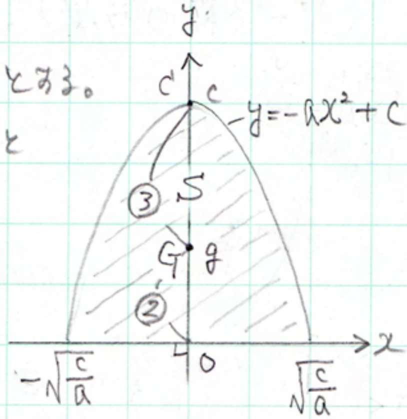
ここで $x=0$ とすると

$y=\frac{1}{2a}+ap^2$ (l の y 切片)

$\therefore\ QR=\boxed{\frac{1}{2a}}$ (一定) …… 焦点 $(0,\frac{1}{4a})$ と準線 $y=-\frac{1}{4a}$ との距離。

(2) $y=f(x)=-ax^2+c\ \ (a>0,\ c>0)$ とする。

曲線と x 軸とで囲まれた面積を S とすると、



$$S=2\int_0^{\sqrt{\frac{c}{a}}}(-ax^2+c)\,dx$$

$$=2\left[-\frac{a}{3}x^3+cx\right]_0^{\sqrt{\frac{c}{a}}}=\frac{4c}{3}\sqrt{\frac{c}{a}}$$

S の重心を $G(0,g)$ とする。さらに、S を x 軸のまわりに回転させた体積を V_x とすると、$V_x=2\pi\int_0^{\sqrt{\frac{c}{a}}}(-ax^2+c)^2\,dx=\frac{16\pi}{15}c^2\sqrt{\frac{c}{a}}$

$V_x=S\times 2\pi g$ より $g=\frac{V_x}{2\pi S}=\frac{\frac{16\pi}{15}c^2\sqrt{\frac{c}{a}}}{2\pi\cdot\frac{4c}{3}\sqrt{\frac{c}{a}}}=\boxed{\frac{2}{5}c}$

※ 重心 G の y 座標 g が、a に関係なく $\frac{2}{5}c$ で表されている。

G は CO を 3:2 に内分している。(どの放物線にもあてはまる。)