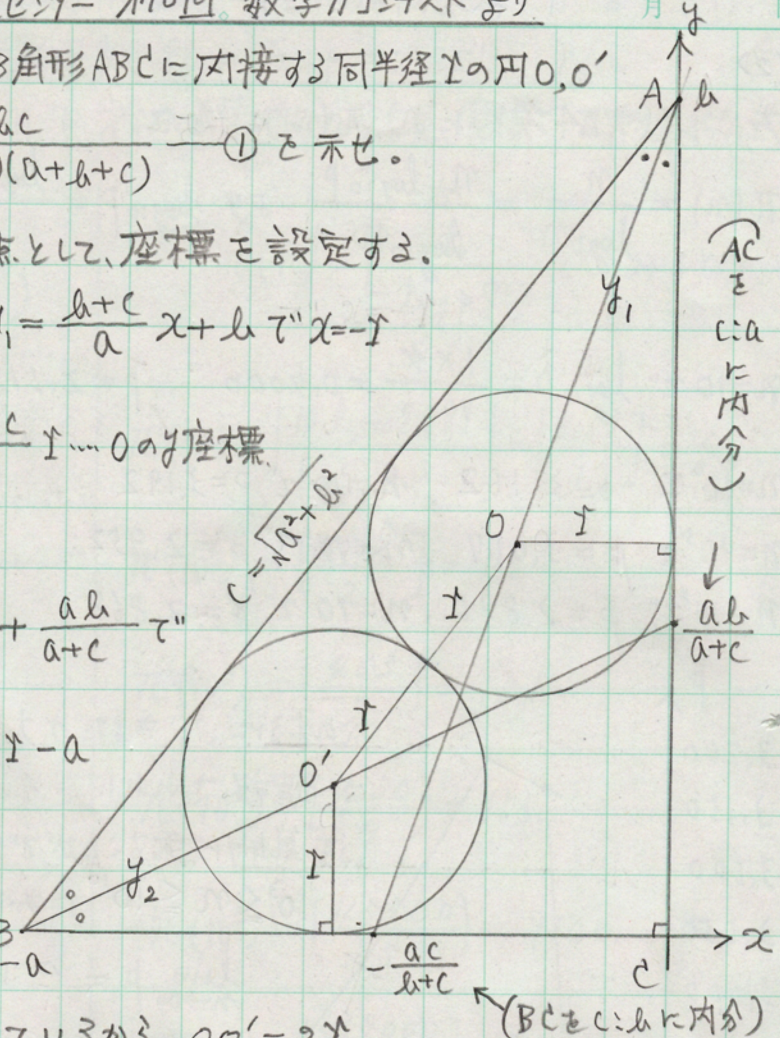
25. 学修支援センター 第10回 数学力コンテストより

問 1．図のような直角3角形ABCに内接する同半径 r の円O，O′ がある。$r=\dfrac{abc}{(a+b)(a+b+c)}$ ──① を示せ。



(解) 図のように、C を原点として、座標を設定する。

(1) ∠A の2等分線 $y_1=\dfrac{b+c}{a}x+b$ で $x=-r$

とすると、$y_1=b-\dfrac{b+c}{a}r$ …… O の y 座標

(2) ∠B の2等分線，

$y_2=\dfrac{b}{a+c}x+\dfrac{ab}{a+c}$ で

$y_2=r$ とすると、$x=\dfrac{a+c}{b}r-a$

…… O′ の x 座標

(3) 2円 O，O′ が外接しているから，$OO'=2r$

よって，$(OO')^2=4r^2$ の解が ① であればよい。

$$(OO')^2=\left(\frac{a+c}{b}r-a+r\right)^2+\left(b-\frac{b+c}{a}r-r\right)^2$$

$$=\left(\frac{a+b+c}{b}r-a\right)^2+\left(\frac{a+b+c}{a}r-b\right)^2 \text{ に①を代入}$$

$$=\left\{\frac{a+b+c}{b}\times\frac{abc}{(a+b)(a+b+c)}-a\right\}^2+\left\{\frac{a+b+c}{a}\times\frac{abc}{(a+b)(a+b+c)}-b\right\}^2$$

$$=\left\{\frac{a(c-a-b)}{a+b}\right\}^2+\left\{\frac{b(c-a-b)}{a+b}\right\}^2$$

$$=\frac{(a^2+b^2)(c-a-b)^2\times(a+b+c)^2}{(a+b)^2\times(a+b+c)^2} \Leftarrow 4r^2 \text{ の形をめざして。}$$

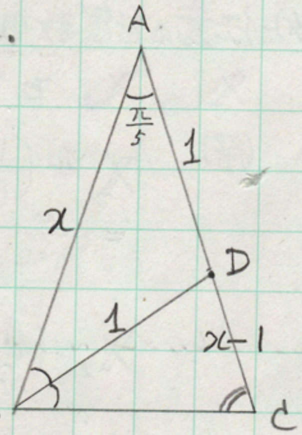
$$= \frac{(a^2+b^2)(c^2-a^2-2ab-b^2)^2}{(a+b)^2(a+b+c)^2}$$ （$a^2+b^2=c^2$ の関係を代入して）

$$= \frac{c^2(-2ab)^2}{(a+b)^2(a+b+c)^2} = 4I^2$$

∴ ①が確認された。

問2、次の問に答えよ。(1)～(6)は、連続しています。

(1) 右図のように、頂角 $\pi/5$ の2等辺3角形を考える。
∠ABCの2等分線とACとの交点をDとする。
AD=BD=1 として、ABの長さ x を求めよ。



(解) $\triangle BCD \backsim \triangle ABC$ より、BC=1

∴ $1:(x-1)=x:1 \quad (x>0)$

より $x = \boxed{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$

(2) $a=\sin^2\frac{\pi}{5}$, $b=\sin^2\frac{2\pi}{5}$ の値を(1)を利用して求めよ。

(解) △ABDで余弦定理より

※(1)より
$x-1 = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$

$$\cos\frac{\pi}{5} = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2+1^2-1^2}{2\cdot\frac{1+\sqrt{2}}{2}\cdot 1} = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$$

$$\therefore a = 1-\left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^2 = \boxed{\frac{5-\sqrt{5}}{8}}$$

△BCDで余定より $\cos\frac{2\pi}{5} = \dfrac{\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2+1^2-1^2}{2\cdot\frac{\sqrt{5}-1}{2}\cdot 1} = \dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$

$$\therefore b = 1-\left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)^2 = \boxed{\frac{5+\sqrt{5}}{8}}$$

No.　　　　月　　日

(3) $a+b$ および ab は有理数であること示せ。

(解) $a+b=\frac{5-\sqrt{5}}{8}+\frac{5+\sqrt{5}}{8}=\boxed{\frac{5}{4}}$ ……(有理数)

$ab=\frac{5-\sqrt{5}}{8}\times\frac{5+\sqrt{5}}{8}=\frac{20}{64}=\boxed{\frac{5}{16}}$ ……(有理数)

※ $\frac{a+b}{ab}=4$

(4) 任意の自然数 n に対して、$X_n=(a^{-n}+b^{-n})(a+b)^n$ とおくとき、X_1, X_2 を求めよ。

(解) $X_1=\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)(a+b)=\frac{a+b}{ab}\cdot(a+b)=\frac{\left(\frac{5}{4}\right)^2}{\frac{5}{16}}=\boxed{5}$

$X_2=\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)(a+b)^2=\left(\frac{a+b}{ab}\right)^2\cdot(a^2+b^2)$

$=\left(\frac{5/4}{5/16}\right)^2\cdot\left\{\left(\frac{5-\sqrt{5}}{8}\right)^2+\left(\frac{5+\sqrt{5}}{8}\right)^2\right\}=\boxed{15}$

(5) X_{n+1} を X_n と X_{n-1} で表し、X_n が整数であることを示せ。

(解) $X_n=\left(\frac{1}{a^n}+\frac{1}{b^n}\right)(a+b)^n=\left(\frac{a+b}{ab}\right)^n(a^n+b^n)$

$=4^n\left\{\left(\frac{5-\sqrt{5}}{8}\right)^n+\left(\frac{5+\sqrt{5}}{8}\right)^n\right\}=\boxed{\left(\frac{5-\sqrt{5}}{2}\right)^n+\left(\frac{5+\sqrt{5}}{2}\right)^n}$

※これは、問(6)の解、X_n の一般項となっています。

ここで、$\frac{5-\sqrt{5}}{2}=\alpha$, $\frac{5+\sqrt{5}}{2}=\beta$ とおくと、$\alpha+\beta=5$, $\alpha\beta=5$

即ち、$X_n=\alpha^n+\beta^n$, $X_{n-1}=\alpha^{n-1}+\beta^{n-1}$, $X_{n+1}=\alpha^{n+1}+\beta^{n+1}$

$\therefore X_{n-1}\cdot X_{n+1}=\alpha^{2n}+\alpha^{n+1}\beta^{n-1}+\alpha^{n-1}\beta^{n+1}+\beta^{2n}$

月　日　No.

$$= \alpha^{2n} + \underbrace{\left(\frac{\beta}{\alpha} + \frac{\alpha}{\beta}\right)}(\alpha\beta)^n + \beta^{2n}$$

$$\Rightarrow \frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta} = \frac{(\alpha+\beta)^2 - 2\alpha\beta}{\alpha\beta} = \frac{25-10}{5} = 3$$

$$= \alpha^{2n} + 3 \cdot 5^n + \beta^{2n}$$

$$X_n^2 = (\alpha^n + \beta^n)^2 = \alpha^{2n} + 2 \cdot (\alpha\beta)^n + \beta^{2n} = \alpha^{2n} + 2 \cdot 5^n + \beta^{2n}$$

$$= X_{n-1} \cdot X_{n+1} - 5^n$$

$$\therefore \boxed{X_{n+1} = \frac{X_n^2 + 5^n}{X_{n-1}}}$$

$$X_n = \alpha^n + \beta^n$$

$$= \underbrace{(\alpha+\beta)^n} - \left\{ {}_nC_1\, \alpha\beta (\alpha^{n-2} + \beta^{n-2}) + {}_nC_2\, \alpha^2\beta^2 (\alpha^{n-4} + \beta^{n-4}) + \cdots\cdots \right\}$$

$${}_nC_0\alpha^n + {}_nC_1\alpha^{n-1}\beta + {}_nC_2\alpha^{n-2}\beta^2 + \cdots + {}_nC_{n-2}\alpha^2\beta^{n-2} + {}_nC_{n-1}\alpha\beta^{n-1} + {}_nC_n\beta^n$$

すなわち、$\alpha^n + \beta^n$ は、$(\alpha+\beta)$，$\alpha\beta$ で表される。(整係数)

さらに $\alpha+\beta = \alpha\beta = 5$ であるから、X_n は整数である。

(6) X_n の一般項を求めよ。‥‥既決。

※ (5)→(6) の順ではなく、(6)→(5) の順の解答となってしまいました。

(5) から (6) が導かれるような流れは、どうなっているのだろうか。