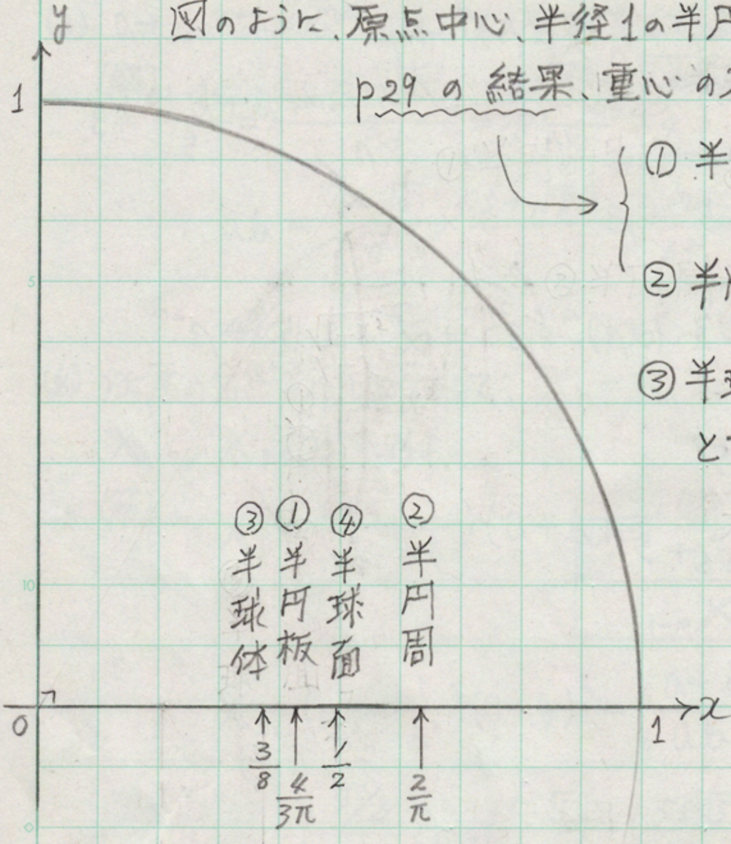
26、半円・半球に関する重心について

図のように、原点中心、半径1の半円を考える。



p29 の結果、重心のx座標は、

① 半円の場合 $\boxed{g_1=\dfrac{4}{3\pi}}$

② 半円周の場合 $\boxed{g_2=\dfrac{2}{\pi}}$

③ 半球の場合、重心 $G(g_3, 0)$ とする。 Gを支点として、

左まわりモーメントを M_L
右 〃 M_R

とすると、$M_L=M_R$ より
下の結果から

$3-8g_3=0$

$\therefore \boxed{g_3=\dfrac{3}{8}}$

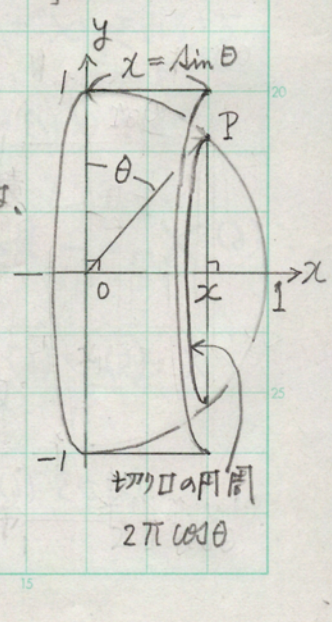
$$M_L=\int_0^{g_3}(g_3-x)\pi(1-x^2)\,dx=\frac{\pi}{12}(6g_3^2-g_3^4)\quad(0\leqq x\leqq g_3)$$

$$M_R=\int_{g_3}^{1}(x-g_3)\pi(1-x^2)\,dx=\frac{\pi}{12}(3-8g_3+6g_3^2-g_3^4)\quad(g_3\leqq x\leqq 1)$$

④ 半球面の場合、重心 $G(g_4, 0)$ とする。

図のようにθを定めると、$0\sim x$間の球の表面積Sは、

$$S=\int_0^{\theta}2\pi\cos\theta\,d\theta=2\pi\sin\theta=2\pi x$$



これは外接円筒の側面積に対応している。
(球の表面積は、x軸方向に均等に分布)

$\therefore \boxed{g_4=\dfrac{1}{2}}$

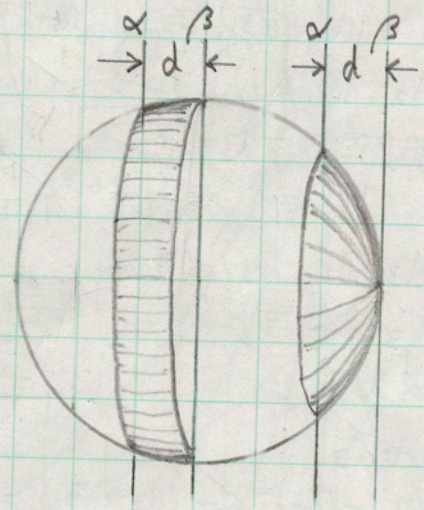
前ページの結果から、半径 r の球面の場合、$x = r\sin\theta$ として $0 \sim x$ 間の表面積を $S(x)$ とすると 面積比の関係から、

$$S(x) = S \times r^2 = r^2 \cdot 2\pi \sin\theta = 2\pi r x$$

よって、球の表面積に関する次の公式が得られる。

半径 r の球面について、2枚の平行平面 α, β（間隔 d）ではさまれた部分の表面積を S とすると

$$\boxed{S = 2\pi r d}$$



※ 右図のように球状の玉ねぎの薄皮を、同幅で切り取る場合、中央付近のリングも端のキャップも量としては、ほぼ等しい といえる。

中学で扱う球の表面積、$S = 4\pi r^2$ は、$d = 2r$ の場合に当る。