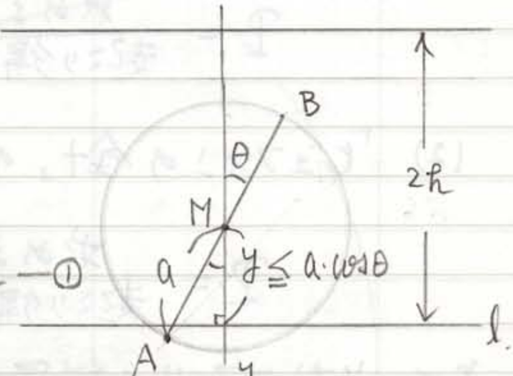
1.「ビュフォンの針」について

広い床一面に幅2hで、平行線が無数にひいてある。長さ2a（a≦h）の針を落下させたとき、この針が平行線と交わる確率pを、求めよ。（線や針の太さは無視してよい。）

（解）針ABの中点Mから最も近い平行線lまでの距離をy、針とlの法線とのなす角を図(1)のようにθとする。

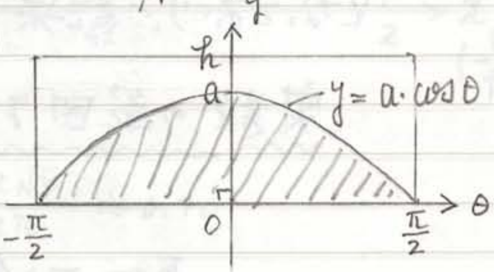
図(1)



θ, yの条件から $-\frac{\pi}{2}\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{2},\ 0\leqq y\leqq h$ ——①

針がlと交わる場合の条件から
$0\leqq y\leqq a\cdot\cos\theta$ ——②

図(2)



①,②の条件を示す領域を図(2)のように表すと、①の領域面積 $=\pi h$

②のそれ $=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} a\cdot\cos\theta\,d\theta = 2a$

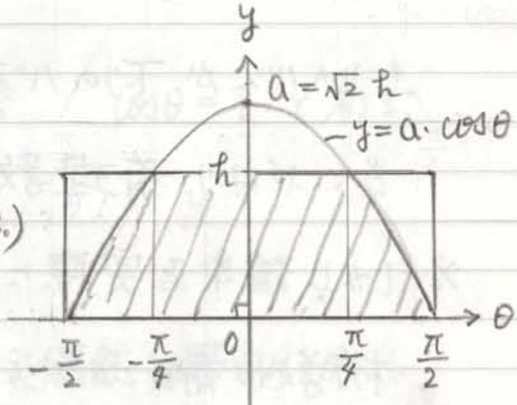
よって求める確率 $\boxed{p=\frac{2a}{\pi h}} \fallingdotseq 0.64\cdot\frac{a}{h}$ （a≦h）

次に（a＞h）の場合は、上解と同様に①の領域 $=\pi h$ であるが、②の領域は aがhに対して特別な倍率の場合、pの算出が容易である。

即ち、$a=\frac{2}{\sqrt{3}}h$ の場合（$|\theta|<\frac{\pi}{6}$ では常に交わる。）

$a=\sqrt{2}h$ 〃 （$|\theta|<\frac{\pi}{4}$ 〃 ）

$a=2h$ 〃 （$|\theta|<\frac{\pi}{3}$ 〃 ）



（a=√2hの場合のイメージ）

(1) 高校数学での確率の定義

$$P = \frac{\text{求める場合の数}}{\text{起こり得る全ての場合の数}} \Rightarrow \text{有理数}$$

(2) 「ビュフォンの針」の場合

$$P = \frac{\text{求める場合を示す領域(面積)}}{\text{起こり得る全ての場合を示す領域(面積)}}$$

となっており、結果は有理数ではカバーできず

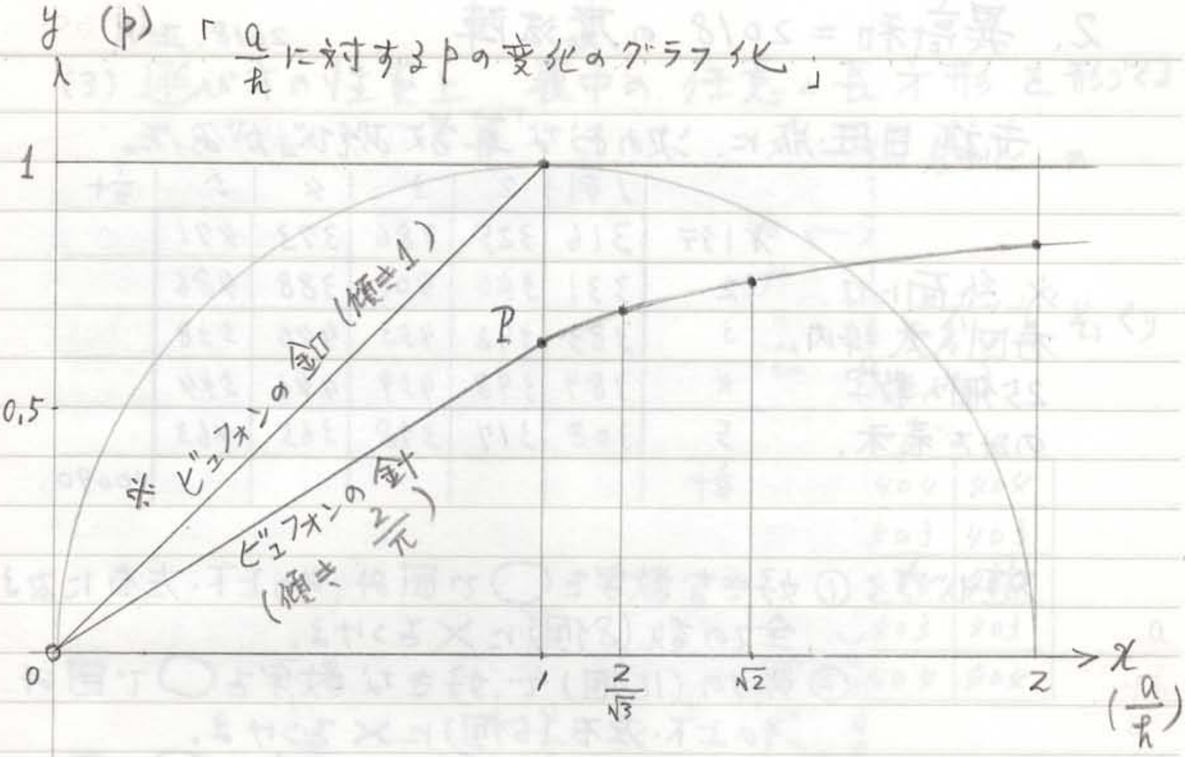
実数の範囲まで拡張されている。

$$P = \frac{\text{長さ}}{\text{長さ}}, \frac{\text{体積}}{\text{体積}}, \frac{\text{時間}}{\text{時間}} \text{ などの場合あり。}$$

※バス停に、無作為に行ったとき、先にくるのは、上りのバスか下りのバスかなど、時間に関する確率も、やはり有理数だけではカバーできないかも。

※しかし確率を実際に活用する場面では、有効数字の桁数は有限であるから不都合は生じない。

前々ページから。



$a=\frac{2}{\sqrt{3}}h$ の場合　$p=\frac{1}{3}+\frac{2\sqrt{3}}{3\pi}\fallingdotseq 0.70$

$a=\sqrt{2}h$　〃　$p=\frac{1}{2}+\frac{2(\sqrt{2}-1)}{\pi}\fallingdotseq 0.76$

$a=2h$　〃　$p=\frac{2}{3}+\frac{4-2\sqrt{3}}{\pi}\fallingdotseq 0.84$

$\frac{a}{h}\to\infty$ の場合　$p\to 1$ と考えてよい。

※「ビュフォンの釦(ボタン)」(半径aの円)の場合　$\cos\theta=1$ と考える。

即ち $y=x$　$(p=\frac{a}{h})$

「ビュフォンの針」に出てくる
「半円周の重心」に出てくる
$\Big\}$ $\frac{2}{\pi}$、単なる偶然と思われるが…。
(点Pのy座標)