DATE 2018・11・15

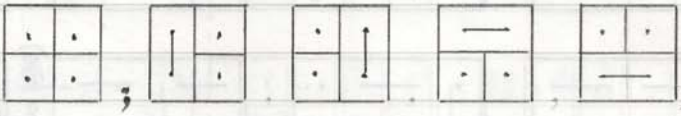
4.「松の廊下」と畳敷き。

問、幅1間、長さ $n/2$ 間の廊下に2種類の畳を敷くとき、その場合の数を a_n とし、n の式で表せ。(但し、廊下の一方は庭で他方は座敷、方向性のある廊下とする。畳は、1間×半間と半間×半間の2種類がある。)
(以下「畳」と表現)

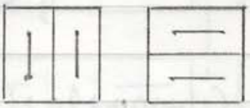
(解) $n=1$ の場合、(畳0) (畳1)

畳の使用数順に $(1+1)$ $\boxed{a_1=2}$

$n=2$ の場合 (畳0) (畳1)

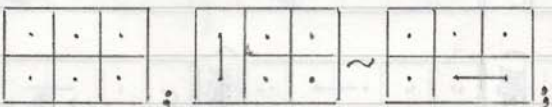


(畳2)

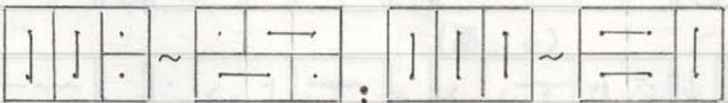


の7通り $(1+4+2)$ $\boxed{a_2=7}$

$n=3$ の場合 (畳0) (畳1)



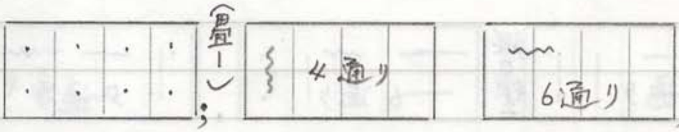
$(1+7+11+3)$



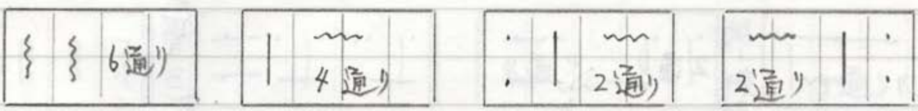
(畳2) 11通り (畳3) 3通り

計 $\boxed{a_3=22}$

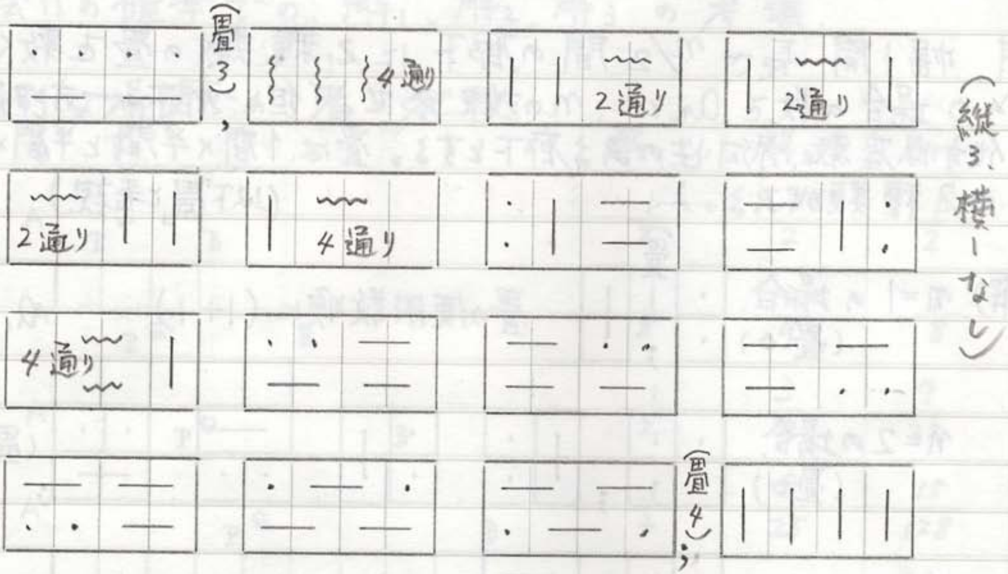
$n=4$ の場合 (畳0) (畳1)

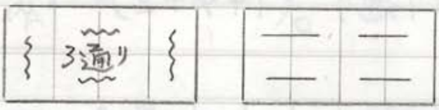


(畳2)



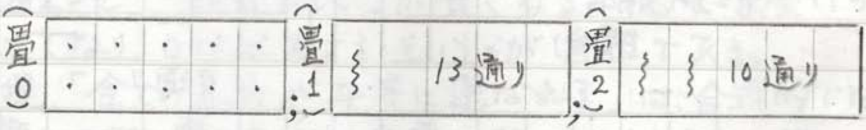
(〜は可動)

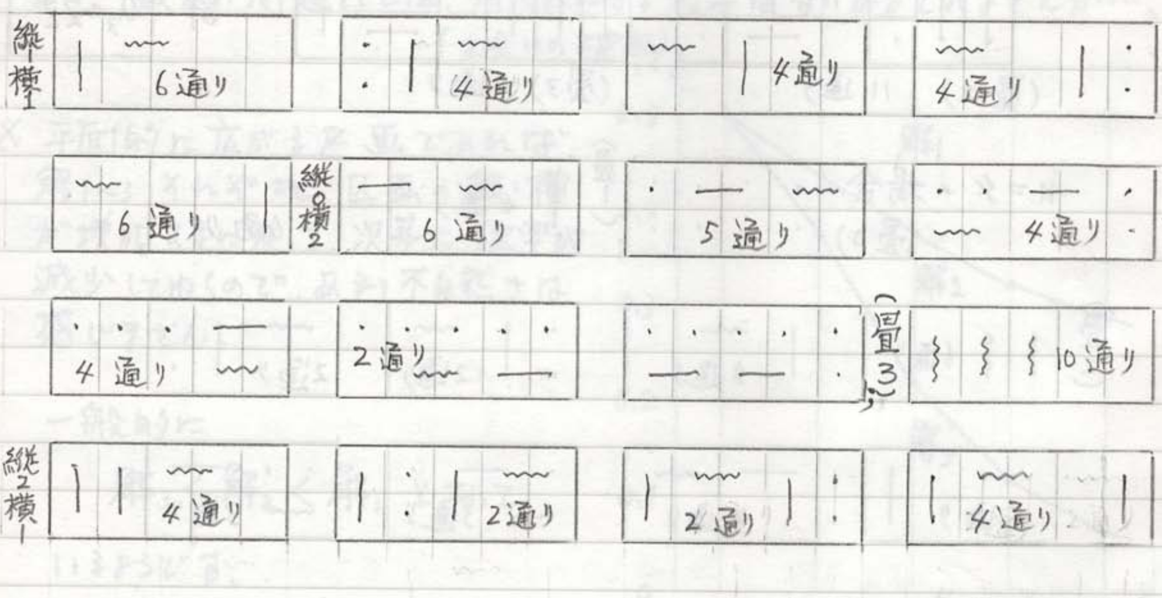


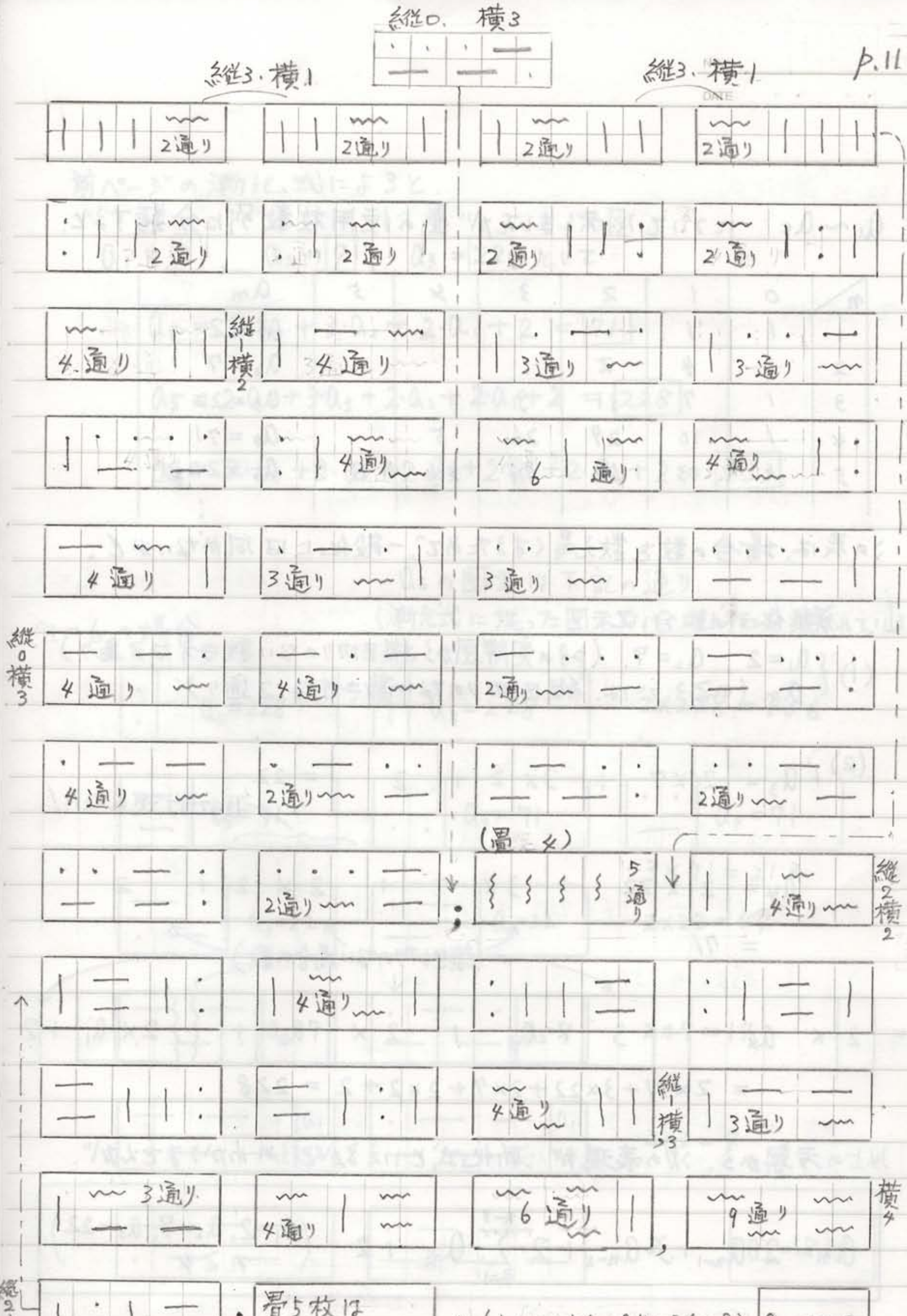


$(1+10+29+26+5)$ $\boxed{a_4=71}$

$n=5$の場合







畳5枚は 8通り

$\therefore (1+13+56+94+56+8)$ $\boxed{a_5=228}$

$a_1 \sim a_5$ について図示しましたが畳の使用枚数別に分類すると、

n	0	1	2	3	4	5	a_n
1	1	1					$a_1 = 2$
2	1	4	2				$a_2 = 7$
3	1	7	11	3			$a_3 = 22$
4	1	10	29	26	5		$a_4 = 71$
5	1	13	56	94	56	8	$a_5 = 228$

この表は、場合の数を数え易くするためで、一般化には向かないかと。

I. 漸化式について

(1) $\begin{cases} a_1 = 2,\ a_2 = 7. & \text{（p9の実際図から縦区切りのない敷き方は3通り）} \\ a_n & \text{（} n \geqq 3 \text{ では、縦区切りのない敷き方は2通り）} \end{cases}$

(2)、

$$a_3 = 2 \times 7 + 3 \times 2 + 2 = 22$$

$$a_4 = 2 \times 22 + 3 \times 7 + \underbrace{2 \times 2}_{a_3\text{では現れない!}} + 2 = 71$$

（縦区切りのない場合の数）

$$a_5 = 2 \times a_4 + 3 \times a_3 + 2 \times a_2 + 2 \times a_1 + 2$$

$$= 2 \times 71 + 3 \times 22 + 2 \times 7 + 2 \times 2 + 2 = 228$$

以上の考察から、次の表現が漸化式といえるかどうかわかりませんが、

$$\boxed{a_n = 2 \cdot a_{n-1} + 3 \cdot a_{n-2} + 2 \cdot \sum_{k=1}^{n-3} a_k + 2 \quad \left(\begin{matrix} a_1 = 2,\ a_2 = 7,\ a_3 = 22 \\ n \geqq 4 \end{matrix} \right)}$$

前ページの漸化式によると.

$a_1=\boxed{2}$, $a_2=\boxed{7}$, $a_3=\boxed{22}$ として

$$a_4 = 2\cdot a_3 + 3\cdot a_2 + 2\cdot a_1 + 2 = \boxed{71}$$

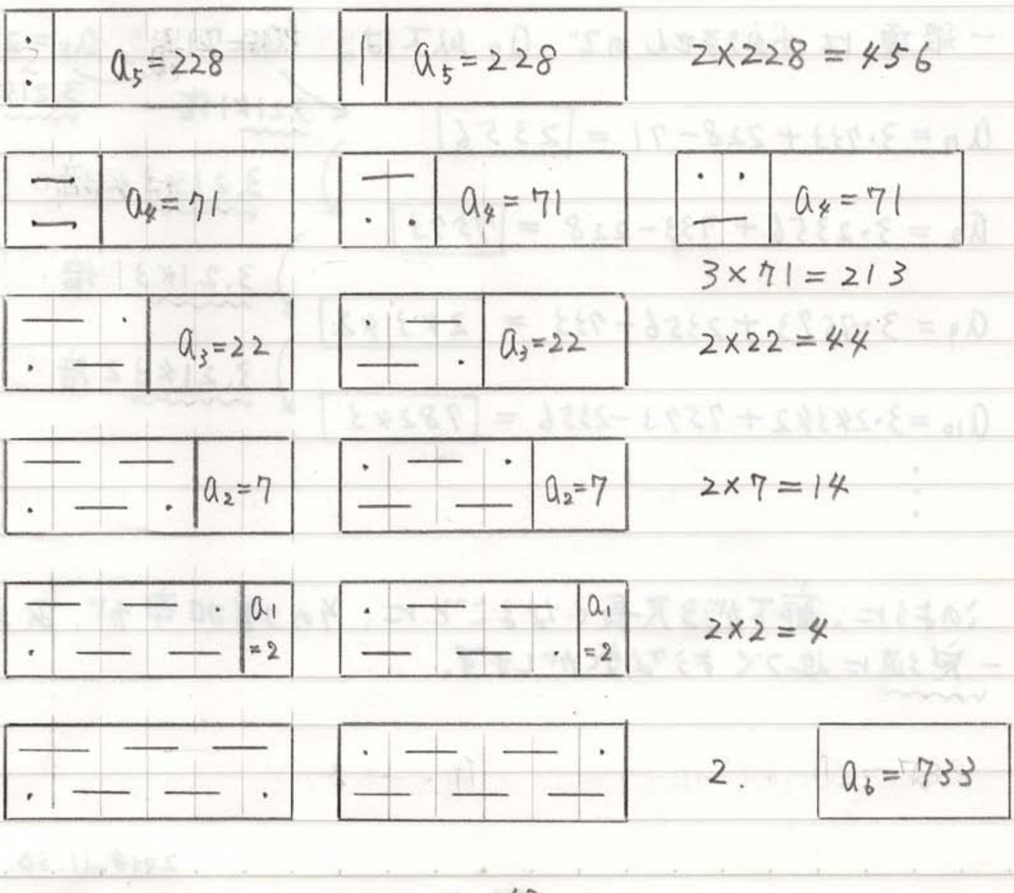
$$a_5 = 2\cdot a_4 + 3\cdot a_3 + 2\cdot a_2 + 2\cdot a_1 + 2 = \boxed{228}$$

$$a_6 = 2\cdot a_5 + 3\cdot a_4 + 2\cdot a_3 + 2\cdot a_2 + 2\cdot a_1 + 2 = \boxed{733}$$

$$\vdots$$

a_6の図示は下記の通り
(漸化式に従った図示は、合理的に分類されている!)

$n=6$ の場合.



$2\times228=456$

$3\times71=213$

$2\times22=44$

$2\times7=14$

$2\times2=4$

2.

p.12 の「漸化式」 $a_n = 2\cdot a_{n-1} + 3\cdot a_{n-2} + 2\cdot\sum_{k=1}^{n-3} a_k + 2 \quad (n \geqq 4)$

を変形して $a_n = a_{n-2} + 2\cdot\sum_{k=1}^{n-1} a_k + 2$

（添字のランクを1つ下げて、辺々引く！）

$$
\begin{array}{rl}
-) & a_{n-1} = a_{n-3} + 2\cdot\sum_{k=1}^{n-2} a_k + 2 \\
\hline
 & a_n - a_{n-1} = a_{n-2} - a_{n-3} + 2\cdot a_{n-1}
\end{array}
$$

∴ 漸化式は、 $\boxed{a_n = 3\cdot a_{n-1} + a_{n-2} - a_{n-3}}$ $\left(\begin{array}{c} a_1=2,\ a_2=7,\ a_3=22 \\ n \geqq 4 \end{array}\right)$

一般項はわかりませんので a_7 以下は。 $(a_6=733,\ a_5=228)$ 3.2149倍

3.21141倍

$a_7 = 3\cdot733 + 228 - 71 = \boxed{2356}$

3.21434倍

$a_8 = 3\cdot2356 + 733 - 228 = \boxed{7573}$

3.21431倍

$a_9 = 3\cdot7573 + 2356 - 733 = \boxed{24342}$

3.21432倍

$a_{10} = 3\cdot24342 + 7573 - 2356 = \boxed{78243}$

⋮

このように、廊下が3尺長くなるごとに、その増加率が、ある一定値に近づくような気がします。

2018.11.30.